УДК 550.831+550.838
№ держреєстрації 0101U000286
Інв. №

Національна академія наук України
Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
О3680, м. Київ – 142, пр. Палладіна, 32; тел. (044) 424-01-12; факс 450-25-20

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України
академік НАН України
В. І. Старостенко
«   »   2005 р.

З В І Т
ПРО НАУКОВО–ДОСЛІДНУ РОБОТУ
КЛАСИ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ
(заключний)

Керівники НДР:
головний науковий співробітник, професор,
доктор фізико-математичних наук
А. В. Чорний

старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
О. А. Чорна

науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
А. І. Якимчик

2005

Рукопис закінчено «1» листопада 2005 р.
Результати цієї роботи розглянуто Вченою Радою ІГФ,
протокол №   від «   »   2005 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР,

Чорний А. В.

провідний науковий співробітник, професор
(розд. 1)
доктор фізико-математичних наук

Співкерівник НДР,
Чорна О. А.
старший науковий співробітник, (реферат, вступ, висновки, розд. 2)
кандидат фізико-математичних наук

Співкерівник НДР,
Якимчик А. І.
науковий співробітник, (реферат, вступ, висновки, розд. 3)
кандидат фізико-математичних наук

Науковий співробітник,
Дубовенко Ю. І.
кандидат фізико-математичних наук
(розд. 1, висновки)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 120 с., 10 рис., 119 джерел.

Об'єкт дослідження – математичні моделі геологічного середовища та класи єдиності розв'язку обернених задач теорії потенціалу.

Мета роботи – розробка теорії і методів розв'язування лінійних і нелінійних обернених задач для тіл з відомими класами єдиності і для тіл, близьких до цих класів.

Метод дослідження – формально-теоретичний аналіз існуючих підходів щодо постановки і методів розв'язання граничних обернених задач теорії потенціалу.

В роботі представлено нові теоретичні результати дослідження єдиності та стійкості локальних розв'язків конкретних інтегро-диференціальних рівнянь, до яких зводяться обернені задачі гравіметрії, що пов'язані з визначенням форми чи густини аномалієстворюючих тіл. Розроблено основи „лінеаризованої" постановки оберненої структурної задачі логарифмічного потенціалу в класі неперервних, разом з першими похідними, функцій для границі поділу однорідних пластів різної густини за умов задання вхідних даних на істотно обмежених множинах. Побудовано чисельні алгоритми з можливістю керувати швидкістю збіжності відповідних ітераційних процесів і проведено порівняльне тестування для конкретних математичних моделей середовища.

Розв'язано обернену задачу логарифмічного потенціалу для обмеженого тіла, близького до круга, за відомої постійної щільності без істотних обмежень на розмірність функціональних просторів. Запропоновано певні методи непрямого визначення коефіцієнтів характеристичного полінома матриці, що засновані на ортогоналізації деяких послідовностей векторів. Охарактеризовано області застосування даних методів при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь, до яких найчастіше зводяться обернені задачі геофізики.

ВЛАСНІ ВЕКТОРИ, ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ, ГРАНИЧНІ ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ, ПРЯМІ І ОБЕРНЕНІ, КОРЕКТНІ І УМОВНО КОРЕКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ, КОНТАКТНА ЗАДАЧА, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ, ЄДИНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ, ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідження, результати яких викладаються в даному п’ятирічному звіті, продовжують розпочате кілька десятиліть тому назад вивчення обернених задач теорії потенціалу [100–105] та містять розробки ряду нових проблем теорії інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій [18–21, 78–91, 97–99, 106–109, 111–114]. Можна з впевненістю сказати, що створено основи теорії граничної коректності певних лінійних і нелінійних обернених задач теорії потенціалу, чільне місце в якій займає вивчення проблем єдиності розв’язків. Важливість вивчення цих проблем не піддається сумніву математиками, бо тільки коректні в класичному сенсі чи в сенсі коректності за А. М. Тихоновим задачі фізично детерміновані. Проте в геофізичній літературі, поряд з широким застосуванням теорії регуляризації, де, до речі, проблеми єдиності одні із центральних, не приділялось належної уваги цій проблематиці. Більше того, наприкінці 70-х років минулого століття, В. М. Страхов висунув концепцію ε–еквівалентності в задачах інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій. Розвиваючи цю концепцію, О. І. Кобрунов довів її до такого рівня, у відповідності з яким розв’язки задач з цілком неперервними операторами слід шукати не в компактних класах єдиності, а в більш потужних екстремальних класах, що містять (або ж і ні) класи єдиності як власні підкласи. Безпідставність цього твердження особливо чітко проглядає з його логічного висновку, у відповідності з яким „бажані” розв’язки обернених задач здобуваються в нуль-множині оператора задачі. Інакше кажучи, відповідні цим розв’язкам красиві геологічні побудови знахо-

дяться за значеннями нульового поля, тобто, за його повної відсутності. Тому вивчення проблем єдиності залишається актуальним в загальній теорії регуляризації обернених задач геофізики аж до сучасності.

В даній роботі наведено результати дослідження єдиності локальних розв'язків конкретних інтегро-диференціальних рівнянь, до яких зводяться ті чи інші обернені задачі, пов'язані з визначенням аномалієстворюючих тіл в рамках теорії малих збурень. Також розроблено основи теорії „лінеаризованої" оберненої задачі логарифмічного потенціалу для контактної поверхні в локальній області за умов задання вхідних даних на істотно обмежених множинах без обмежень розмірності просторів даних та розв'язків в рамках загальної теорії наближеного вирішення умовно коректних задач геофізики; продовжено дослідження прикладних аспектів задач відновлення границі зірчастих тіл, близьких до заданих; запропоновано метод відшукання розв'язків систем лінійних рівнянь, в якому використовуються процеси доортогоналізації деяких сімей векторів, що виникають при побудові характеристичних поліномів матриць.

За результатами тематичних досліджень відбувся захист двох кандидатських дисертацій: Якимчиком А. І. „Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта" (2001 р.) і Дубовенком Ю. І. „Визначення контактної границі за значеннями похідних логарифмічного потенціалу на істотно обмежених множинах" (2005 р.).

1. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ ЗА ПОЛЕМ, ЗАДАНИМ НА КОРОТКОМУ ПРОФІЛІ

Вступ. Теорія розв'язання плоских обернених задач потенціалу для контактної поверхні з інтегральними операторами Пуассона сформована і вивчається здавна в численній геофізичній літературі, як то [39, 44, 51, 57, 119], яка періодично оновлюється. Вирішення контактних задач ґрунтується на апроксимації, запропонованій ще Андреєвим [7]. В [103] отримано набір лінійних інтегральних рівнянь, якими на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ меж $\zeta(x)$ поділу однорідних середовищ з високою точністю замінено нелінійне інтегральне рівняння оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні і побудовано збіжні ітераційні процеси для їх розв'язання. Згідно [103], нелінійна обернена задача логарифмічного потенціалу для контактної поверхні зведена до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона

$$\zeta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x),\ u(x)=\frac{U_y(x,0)}{2\pi f\sigma} \tag{1.1}$$

де, на відміну від рівняння Б. В. Нумерова [44] дано замість *середньої глибини h* до контакту значення $\zeta(x)$ цього контакту у фіксованій точці x (можливість такої підстановки вказав О. А. Шванк [110], а обґрунтував А. В. Чорний [96, 105]). Розв'язок цього рівняння знайдено на компактному структурному класі Страхова[1], на якому розв'язок нелінійної контактної задачі (1.1) існує, єдиний і стійкий [103], але досягається лише при заданні значень поля на необмежених інтервалах, а в польових умовах елементи поля вимірюють на істотно коротких профілях. В [21] вивчалась контактна задача за умов задання вхідних даних на *істотно обмежених множинах* як лінеаризований варіант задачі [76], який дозволяє відновити контакт за значеннями поля на *істотно обмежених* інтервалах через заміну інтегрального рівняння з повільноспадним ядром Пуассона рівнянням зі швидкоспадним ядром. Способи її коректного розв'язання з урахуванням результатів [21, 97, 103] наведено в [18]. Але досі не з'ясовано питання, з якими особливостями задачі пов'язано розмаїття її описів: чи то з неозорою множиною моделей задачі; чи то з наявністю теоретичних проблем її розв'язності, що важко піддаються дослідженню; чи то з труднощами чисельної реалізації її розв'язків, що трапляються на практиці. Відсутність у літературі детального аналізу постановок задачі і методів її розв'язування, з якого випливала б відповідь на поставлене питання, спонукало до спроби

[1] Перетині класу функцій густини, обмежених і локально інтегрованих майже всюди в необмеженій замкнутій області, що містить тяжіючі маси, і класу неперервних за Гельдером (обмежених) функцій контакту.

з'ясувати ситуацію, що склалася. Поза спробою вичерпного огляду всієї літератури з проблем коректної розв'язності і чисельної реалізації розв'язків задачі для контактної поверхні і ефективності їх використання для тлумачення гравімагнітних аномалій в статті [97] зроблено якісний аналіз основних праць щодо стану вивченості математичної моделі задачі, який потім продубльовано в [21]. Наводимо звідти основні міркування.

1.1. Основні моделі задачі. Задачу про відновлення межі поділу двох однорідних середовищ уперше сформулював і наближено розв'язав Б. В. Нумеров в 1930 р. у такій постановці [44]. Відомо, що *під плоскою поверхнею Землі* ∂D_1 : $y = 0$ *є одна контактна границя* $\partial D_2 : \zeta = \zeta(x)$, $-\infty < x < \infty$, *що розділяє однорідні шари легких "верхніх " порід з густиною* $\sigma_1 = const$ *від важчих "нижніх" порід з густиною* $\sigma_2 = const$. Окрім різниці $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ густин порід *задано значення сили тяжіння* $U_y(x,0)$, $-\infty < x < \infty$, *і віддаль* $h = \zeta(x^*)$ *між поверхнями* ∂D_1 *і* ∂D_2 у певній точці x^*, яку відраховують за нормаллю до ∂D_1 (рис. 1.1. а). За цими вихідними даними *потрібно визначити "поверхню"* ∂D_2, *припустивши, що невідома функція* $\zeta = \zeta(x)$, *яка описує межу поділу, є однозначною й обмеженою.* Для визначення контакту в цих умовах Б. В. Нумеров вивів нелінійне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + h^2} d\xi = u(x) - h,\ u(x) = \frac{U_y(x,0)}{2\pi f\sigma}, \tag{1.2}$$

що залежить від *двох параметрів* – стрибка σ густини на контакті $\zeta(x)$ і глибини *h* залягання контакту в деякій довільно обраній точці x^*, яка не збігається, взагалі кажучи, з точкою *x* спостереження поля; *f* – гравітаційна стала. Наближений розв'язок цього рівняння Б. В. Нумеров отримав у вигляді

$$\zeta_{\text{Н}}(x) = h + \Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$$

за додаткової умови, що рельєф контактної границі не надто контрастний, в крайньому випадку такий, що коливання функції $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ менше від *h.* За цієї умови однозначну функцію $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ визначено як обмежений розв'язок лінійного інтегрального рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2} \Delta\zeta(\xi) d\xi = u(x) - h, \tag{1.3}$$

яке залежить від *двох параметрів σ* і *h*, тобто $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x) = \Delta\zeta(x;\sigma;h)$.

М. Р. Малкін [39] задачу визначення контактної поверхні ∂D_2 розділу двох однорідних косо намагнічених шарів за заданим магнітним потенціалом і стрибком $J = (J_x, J_y)$ вектора намагніченості порід звів до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння, яке за вертикальної намагніченості порід збігається з рівнянням (1.2). Наближений його розв'язок $\zeta_{\text{М}}(x) = h + \Delta_{\text{М}}\zeta(x)$ одержано методом Нумерова і тому залежить від *трьох параметрів:* двох природних – складових J_x і J_y стрибка вектора намагніченості порід і одного "привнесеного" – товщини *h* виділеного однорідного магнітного шару, тобто $\Delta_{\text{М}}\zeta(x) = \Delta\zeta(x; J_x, J_y; h)$.

Г. Рейнбой [118], порівнюючи лінеаризоване рівняння (1.3) для контактної поверхні з інтегралом Пуассона для подання гармонічної функції *v(x,y)* в півплощині за значенням її на рівні *y = h*

$$v(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2} v(\xi, h) d\xi,$$

виявив, що *лінеаризована задача для контактної поверхні еквівалентна задачі визначення гармонічної функції* $v(x, y)$ за значеннями $v(x,0)$, тобто що $\Delta\zeta(x) = v(x,h)$. Тим самим він фактично показав, що *точний розв'язок* інтегрального рівняння (1.3) повинен бути *слідом*

гармонічної функції (хоча цей факт ще довго залишався неусвідомленим) і, окрім того, відкрив перспективний напрямок в теорії інтерпретації аномалій, пов'язаний з *аналітичним продовженням* полів у півпростір зосередження їх джерел (не тільки необмежених типу шару, але й обмежених) [57, 59, 70, 119].

О. О. Заморєв [22, 23] дослідив у комплексній множині $z = x + iy$ задачу визначення контактної поверхні ∂D_2 у вигляді *скінченної ундуляції* $y(x) = h + \eta(x),\ y(a) = y(b) = h$, на скінченному інтервалі $[a,b]$ горизонтальної прямої $y(x) = h = const > 0,\ x \notin [a,b]$ (рис. 1.1. б). Проблему відновлення форми збурюючого тіла (виповненого масами однорідної густини σ і обмеженого, на відміну від нумерівського шару, прямою $y = h$ і кривою $y(x) = h + \eta(x),\ x \in [a,b],\ \eta(a) = \eta(b) = 0$), тобто задачу визначення *параметрів a,b,h* однозначної на інтервалі $[a,b]$ обмеженої функції $\eta(x)$ за заданими на осі $y = 0$ значеннями (відповідним чином прокаліброваними) похідної логарифмічного потенціалу $U(x, y)$ Заморєв звів до нелінійного рівняння, яке можна записати в двох еквівалентних один одному зображеннях:

$$\int_a^b \ln \frac{\xi - x + ih}{\xi - x + i(h + \eta(\xi))} d\xi = \int_a^b \xi \left(\frac{1 + \eta'(\xi)}{\xi - x + i(h\eta(\xi))} - \frac{1}{\xi - x + ih} \right) d\xi = u(z), \qquad (1.4)$$

$$u(z) = \frac{G(z)}{\pi f \sigma},\ \ G(z) = \frac{\partial U(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right)$$

Обидва ці подання наведено у статті [22], до того ж друге, яке детально вивчено, одержано з першого інтегруванням частинами за умови $\eta(a) = \eta(b) = 0$. В результаті аналізу другого подання напруженості *u(z)* поля Заморєв знайшов його *точне обернення.* На жаль, ефективність цього обернення при розв'язуванні прикладних задач не перевірено ще й досі. Звернемо тепер увагу на перше зображення напруженості поля. Неважко виявити, що дійсна її складова

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + h^2}{(\xi - x)^2 + y^2(\xi)} d\xi = u(x),\ \ y(x) = h + \eta(x),\ x \in [a,b] \qquad (1.5)$$

за зовнішнім виглядом нагадує рівняння Б. В. Нумерова (1.2) без доданку *h* в правій частині, що відтворює за вибраної калібровки поля притягання однорідного шару товщиною *h*>0. Більше того, величина інтегралу в лівій частині рівняння (1.5) не змінюється на заморєвських тілах у разі заміни скінченних границь *a* і *b* на нескінченні -∞ і ∞, тому ліві частини рівнянь (1.2) і (1.5) за зовнішнім виглядом повністю збігаються, хоча і зображають в математичній символіці *різні* за суттю *предметні моделі:* перше – притягання необмеженим шаром між границями $y = h$ і $y = \zeta(x),\ -\infty < x < \infty$; друге – притягання скінченним тілом, обмеженим кривими $y = h$ і $y = h + \eta(x),\ x \in [a,b],\ \ \eta(a) = \eta(b) = 0$. Можливо, зовнішня подібність лівих частин рівнянь Нумерова й Заморєва відігравала свою роль у подальших прикладних дослідженнях, серед яких осібно вирізняється праця [110].

У цій праці, написаній в 1941 р. і виданій в 1947 р., О. О. Шванк помітив, що коли в рівнянні Б. В. Нумерова *замість параметра h підставити значення контакту* $\zeta(x)$ в точці *x* спостереження поля, то з рівняння (1.2) виходить *нове нелінійне* інтегральне рівняння

$$\zeta(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta(\xi)} d\xi = u(x), \qquad (1.6)$$

яке за не дуже великих коливань шуканої функції $\zeta(x)$ можна розв'язувати *методом послідовних наближень.* На одному окремому прикладі він показав, що обчислені "вручну" послідовні наближення $\{\zeta_n(x)\}$ контакту $\zeta(x)$ з першого $\zeta_1(x) = u(x)$ і до 6-го включно мають тенденцію до збіжності. Проте зауваження О. О. Шванка, засноване на виводі Б. В. Нумерова, залишилось, на жаль, без уваги, можливо, через те, що і в самого автора пропозиції *не склалося чіткої думки про єдино можливий функціональний зв'язок* поміж контактом і полем.

Дійсно, в § 2 розд. 8 (стор. 361-374) його книги [110] для поля від контакту розглядаються, як *рівноправні,* два вирази, один з яких, а саме,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\Delta\zeta(\xi)d\xi=u(x),\ \Delta\zeta(x)=\zeta(x)-h\,, \tag{1.7}$$

являє собою лінеаризацію зв'язку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x), \tag{1.8}$$

а другий – зв'язок вигляду (1.6). Так чи інакше, але в наступних роботах О. К. Маловичка [40], В. М. Новоселицького [43] і багатьох інших авторів (див. Бібліографію в [97]) *за рівняння для контактної поверхні брали вираз* (1.8) або його *лінеаризацію* (1.7). Кожен з цих виразів залежить від *двох параметрів* – σ і h – й описує, як це випливає з інтегрального рівняння (1.5) Заморєва при $a\to-\infty$ і $b\to\infty$, вплив необмеженого в латеральному напрямку і обмеженого за товщиною геологічного тіла на зразок синклінорію, антикліналі й синкліналі якого виповнені масами однорідної густини протилежних знаків (рис. 1.1. в). Тіло це відділено від рівня спостережень шаром товщини h, дія якого виразом (1.8) *не враховується.* Разом з тим, у цій постановці було отримано цікаві результати, які бажано використати в теорії структурної задачі, що ґрунтується на рівнянні (1.6). До числа таких розробок в першу чергу відносяться відкриті М. Г. Сербуленком [52] і Ю. В. Антоновим [6] *способи визначення двох і більше контактних границь,* що розділяють однорідні шари. Слід згадати також дослідження О. К. Маловичком [40] питань *уточнення розв'язків* лінеаризованого рівняння та єдиності його розв'язків, якими встановлено, що *одному й тому ж полю можуть відповідати як обмежені* однорідні випуклі тіла, так і *різноманітні необмежені* однорідні тіла типу шару. Заслуговують на увагу перші результати чисельного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (1.8) у межах теорії регуляризації [14, 16, 24, 64, 65], вивчення В. І. Старостенком [55] можливостей *стійкого чисельного визначення декількох контактних границь,* що описуються нелінійними рівняннями виду (1.8), і спроби О. І. Кобрунова та Р. П. Денисюка [31-32] відшукати за допомогою одного чисельного алгоритму границі розподілу *неоднорідних* комплексів.

Аналогічну модель задачі для контактної поверхні в комплексній площині $z=x+iy$ запропоновано в 70 - х р. р. минулого століття В. М. Страховим [60]. Саме для *шаруватого середовища у смузі, відокремленій від нуля і обмеженій прямими* $y=h^-$ і $y=h^+$, $h^-<h^+<0$, що складаються з *двох однорідних шарів* порід з густинами σ, і σ_2, які *розділяє жорданова крива* $\partial D:\eta=\eta(x),\ -\infty<x<\infty$ зі *стрибком* $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$ густини на контакті і з *асимптотою h,* $h^-<h<h^+$, однією й тією ж ліворуч та праворуч, яку *крива* ∂D *може перетинати не більше, ніж скінченне число разів* (рис. 1.1. г), він вивів нове нелінійне інтегральне рівняння

$$\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}-2ih}{s-z}ds=\begin{cases}u^+(z), & z\in D^+\\ u^-(z), & z\in D^-\end{cases}, \tag{1.9}$$

де D^+ - частина площини "вище" кривої ∂D, D^- – "нижче" кривої ∂D, $s=\xi+i\eta$, $\bar{s}=\xi-i\eta$; $u(z)$ – в калібровці (1.4) задано за результатами спостережень на "земній поверхні" $y=0$. Для цього рівняння Страхов довів *теорему єдиності* його розв'язку і *редукував* задачу визначення контакту за полем до задачі *побудови допоміжної функції,* що конформно (і однолистно) відображає нижню півплощину певної комплексної площини на область D^- під шуканою кривою. Цей підхід до розв'язування задачі передбачалося побудувати за аналогією з розвинутим В. К. Івановим методом відшукання однорідно розподілених джерел на скінченних однозв'язних областях [26]. Незабаром після вибраної редукції було знайдено цілі *класи розв'язків* рівняння (1.9). Їх подавали або як сімейства *розв'язків у скінченному вигляді,* коли границю шуканої області визначають скінченним числом параметрів зі скінчен-

ної системи (нелінійних) рівнянь, або у вигляді двопараметричних сімейств *розв'язків "в малому"*, коли границю визначають у вигляді (невеликих) відхилень контура шуканої від контура заданої області. Ці класи отримали, відповідно, О. В. Цирульський [71, 72] і В. Г. Чередніченко [74]. До того ж В. Г. Чередніченко зняв обмеження на розв'язки рівняння (1.9), допустивши, що крива ∂D необов'язково має бути графіком і може перетинати асимптоту *h* нескінченну кількість разів. Детальніше про це можна довідатись в бібліографічному коментарі дисертаційної роботи автора цього розділу, автореферат якої вказаний в переліку посилань як [21].

1.2. МОДЕЛЬ І ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ. Для опису фундаментальної залежності гравітаційного поля від шаруватого середовища мались на початок 1980 - х років дві принципово різні математичні моделі: *модель Нумерова* та *модель Маловичка - Страхова* (рис.1.1. а, г). У моделі Нумерова як прикладну модель середовища розглянуто необмежений шар між контурами ∂D_1 та ∂D_2, його притягання враховано у вигляді суми притягання шаром постійної товщини *h* і відхиленнями від цього шару між прямою $y = h$ і кривою $y = \zeta(x)$. У моделі Маловичка - Страхова предметну модель шаруватого середовища ототожнено з флуктуаціями $y = \eta(x) - h$ кривої $y = \eta(x)$ відносно своєї асимптоти *h*, що обмежують "додатні" та "від'ємні" маси густиною σ; поле цих мас аж ніяк не могло збігатися з полем моделі Нумерова, оскільки *не було враховано вплив* шару товщиною *h*. Проте кожне з інтегральних рівнянь (1.2) і (1.9), що відповідало тій чи іншій моделі, виявилось однаково залежним від *двох параметрів:* надлишкової густини σ і сталої товщини (асимптоти) *h* шару. Відповідно і розв'язки рівнянь також стали залежними від цих параметрів. У літературі відзначений параметричний зв'язок подано навіть як *визначальний* для класифікації обернених задач гравіметрії. З виходом у світ праць [60, 71-74], в яких закладено основи теорії оберненої задачі для предметної моделі Маловичка - Страхова (рис. 1.1. г), устоялося положення, що *обернені задачі для обмежених тіл принципово відрізняються від обернених задач для необмежених тіл*. Їх відмінність полягає саме в тому, що розв'язки задач для обмежених тіл залежать тільки від одного параметра σ, тоді як розв'язки для необмежених тіл залежать як від параметра σ, так і від параметра *h* ("*середньої глибини*" за Нумеровим або асимптоти за Страховим). І довгий час ніхто не піддавав сумніву переконливість цього твердження, хоч воно явно не узгоджувалося з аналізом рівнянь (1.9) та (1.6). Уже побіжний погляд на них переконує, що рівняння (1.9), а отже, й його розв'язок має залежати як від параметра σ, так і від асимптоти *h* шуканого контура *∂D,* тоді як рівняння (1.6) для того ж контура (як і численних інших обмежених) від параметра *h* не залежить. Рівняння (1.6), *якщо воно вірне,* давало зразок опису задачі для контактної поверхні, для якого одне з положень теорії, розвинутої в згаданих роботах, потребувало уточнення. З невідомих причин цього не сталося. Або автор пропозиції (1.6) чи його послідовники не були впевнені в адекватності опису моделі задачі, або авторам праць [60, 71 - 74] не була відома праця [110]. Так чи інакше, але рівняння (1.6) було проігноровано під час побудови теорії обернених задач для шаруватих середовищ і питання про вирішальну відмінність задач для обмежених та необмежених тіл залишилося відкритим. Окрім того, в створеній теорії не розглянуто узагальнення відкритого Г. Рейнбоєм факту, що розв'язки лінеаризованого інтегрального рівняння для контактної поверхні слід шукати на *обмежених множинах гармонічних функцій.* Математичне обгрунтування згаданих та інших супутніх проблем стало предметом подальших досліджень [76, 96, 103, 104].

Початок цих досліджень було закладено аналізом предметних моделей Нумерова і Маловичка - Страхова. В результаті адекватною для двовимірною евклідового простору $R^{(2)} = R^{1(1)} \times R^{(1)},\ R^{(1)} = (-\infty, \infty)$ виявилась предметна модель Нумерова, яку подано у вигляді шару

$$D = \{(x, y):\ -\infty < x < \infty;\quad 0 \le y \le \zeta(x)\},$$

обмеженого контурами $\partial D_1:\ y = 0$ і $\partial D_2:\ y = \zeta(x),\ x \in R^{(1)}$, зануреного в простір $R^{(2)}$ і випо-

вненого масами постійної густини $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ (рис. 1.2). Відповідну предметній математичну модель контактної поверхні знаходять за допомогою *регуляризації* відповідного означеного інтегралу, що розбігається на границі $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$ збурювальної області *D*. Регуляризацію здійснено за правилом [76, 103]

$$u(x,y) = \lim_{\varepsilon \leftarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\varepsilon}^{\zeta(x)} \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\eta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta(\xi) - y]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta(x) - y]^2} d\xi + \begin{cases} +\zeta(x), \ y \le 0, \\ \zeta(x) - 2y, \ 0 < y < \zeta(x), \\ -\zeta(x), \ y \ge \zeta(x). \end{cases}$$

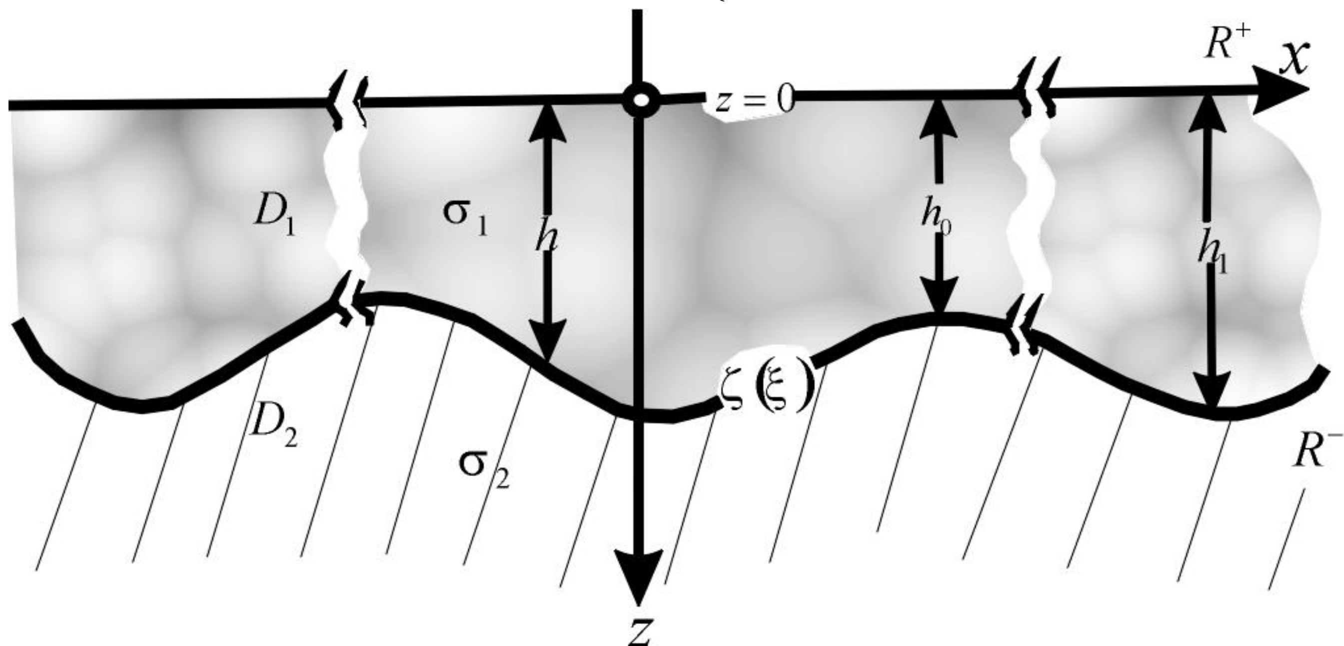


Рис. 1.2. Предметна модель: контактна поверхня порід з різною густиною.

Ця операція *теоретично обґрунтовує адекватність* нелінійного інтегрального рівняння (1.6) геологічній моделі шаруватого середовища.

У зв'язку з вивченням шаруватих структур введено [21, 103] клас Нумерова $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma, \Pi) = S_{loc}(D) \times C^{(k,\alpha)}(R^{(1)})$ як декартовий добуток множини $S_{loc}(D)$ обмежених і (майже всюди) локально інтегрованих функцій, що описують густину $\sigma = \sigma(x,y)$, $(x,y) \in D$ мас в області $D \subset R^{(2)}$ та сукупності $C^{k,\alpha}(R^{(1)})$, $k = 0,1,...,$; $0 < \alpha \le 1$ функцій $y = \zeta(x)$, $x \in R^{(2)}$ неперервних (за Гельдером) з їхніми похідними до *k* - го порядку включно з показниками α, що описують контакти різнорідних шарів зі смуги $\Pi = \{(x,y): -\infty < x < \infty;\ 0 < \zeta(x) \le h_0\}$, де h_0 – обмежена стала. У працях [76, 96, 103, 104] розв'язки рівняння (1.9) розглянуто на класі $Nu^{(k,\alpha)}(1, \Pi)$ зі сталою густиною (відзначеною символом 1). Показано [103], що на класі обмежених східчастих контурів обернене відображення поля в параметри середовища є розривним. Оскільки нелінійний оператор

$$A(\zeta; x) = \zeta(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)} d\xi$$

прямої задачі для контактної поверхні обмежений, неперервний і компактний лише на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ функцій, неперервних (з показником α) на $R^{(1)}$ разом зі своїми першими похідними, то і задача розв'язання рівняння (1.6) поставлена некоректно на множині

$Nu^{(0,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервних функцій (це випливає ще й з того, що кожну східчасту функцію можна подати як границю певної послідовності неперервних функцій). Доведено теорему єдиності розв'язку рівняння (1.6) на $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Доведення здійснено узагальненим на випадок необмежених зірчастих тіл методом, створеним зусиллями П. С. Новікова [42], О. О. Заморєва [22], Л. М. Сретенського [54], І. Т. Тодорова, Д. П. Зідарова [67], М. М. Лаврентьєва [34] і О. І. Прилєпка [48] для обмежених зірчастих тіл. Суть методу полягає в побудові й оцінці певного функціоналу, значення якого слугують ідентифікатором дійсності висловленої пропозиції. Функціонал будують з використанням фундаментальної інтегро - диференціальної тотожності Остроградського - Гріна, він відображає рівність зовнішніх потенціалів (або їх похідних) і властивості густини тіла, що не породжує зовнішнього потенціалу. Функціонал визначають на певній гармонічній функції, яку, у свою чергу, будують за визначеними даними граничної задачі Діріхле в об'єднанні областей, що зумовлюють згадані потенціали.

Вибором методу доведення теорем єдиності розв'язку визначають і сам структурний клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, до якого цей розв'язок належить. *Проблему існування* розв'язку задачі та *питання стійкості* розв'язків розкривають майже "дарма" завдяки спеціальному поданню лівої частини рівняння (1.6). Задавши її у вигляді двох складових, одна з яких (невідома функція), як виявилося, *домінує* за нормою над іншою (інтегральним членом, залежним від невідомої функції), автори отримали можливість побудувати таку послідовність *компактних* операторів, яка збігається до необмеженого *оберненого* до $A(\zeta;x)$ оператора, і за його допомогою, у свою чергу, визначити *точний* розв'язок рівняння з множини допустимих. Таким чином було встановлено, що задачу відновлення контуру необмеженого шару за даними спостережень потенціалу поставлено коректно за Тихоновим на нумерівському класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, тобто, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок задачі існує, єдиний і стійкий. До того ж, цей розв'язок залежить (як і в задачах для обмежених тіл) *тільки від одного* параметра σ і зовсім не залежить від параметра *h (середньої глибини* до контакту за Нумеровим або його *асимптоти* за Страховим).

На основі створеної теорії розроблено два чисельні регулярні способи розв'язування оберненої задачі за наявності перешкод [76]. Побудова одного з них заснована на тому, що значення поля, за якими визначають фрагмент контуру, задають на практично необмеженому інтервалі. В цій ситуації апроксимацію оператора прямої задачі $A(\zeta;x)$ можна виконувати з високою точністю. Побудову другого здійснюють за умови, що значення поля задано на короткому інтервалі і апроксимацію оператора прямої задачі можна здійснити з невисокою точністю. У першому випадку, за умови високоточної апроксимації оператора $A(\zeta;x)$, для чисельного пошуку каркасу наближеного розв'язку рівняння (1.6) конструюють регуляризуючий алгоритм за способом М. М. Лаврентьєва [34]; у другому – для знаходження каркасу розв'язку використовують алгоритм, побудований в межах теорії регуляризації за Тихоновим [65]. У цьому алгоритмі *вперше обґрунтовано вибір* саме такого *стабілізатора,* який відповідає характерним властивостям розв'язків й забезпечує пошук розв'язків на множинах єдиності, і *рекомендовано* певну нестандартну *процедуру* для точнішої порівняно з традиційними *апроксимації рівнянь* Ейлера, що не потребує перемноження матриць високої розмірності. Ретельно вивчені питання скінченновимірної апроксимації оператора $A(\zeta;x)$ і послідовних наближень оберненого оператора $A^{-1}(\zeta;x)$. Особливу увага приділено залежності чисельних розв'язків від *багатьох параметрів,* які супроводжують дискретизацію задачі, і вказано способи вибору таких значень цих параметрів, які сприяють одержанню оптимальних чисельних розв'язків. Доведено *збіжність* каркасів наближених розв'язків до точного розв'язку рівняння (1.6). Детально з теорією оберненої задачі для контактної поверхні читач може при бажанні ознайомитись в дисертації Н. Н. Чорної [76].

Переходячи безпосередньо до задачі з істотно обмеженим інтервалом, перш за все слід сказати, що поняття "*істотно обмеженого інтервалу*" запозичене з роботи [77] з цим уточ-

ненням: для визначення в рівномірній дискретній мережі точок x_k з постійним кроком Δx деякого фрагменту $\zeta(x), x \in [c_1, c_2]$ контактної поверхні $\zeta(x)$ за виміряними на інтервалі $[c_0, c_3] \supset [c_1, c_2]$ з *відомою точністю* $\| u(x) - u_\delta(x) \|_c \le \delta$ значеннями поля $u(x)$ в деякому ітераційному процесі [103] на основі рівняння (1.1) слід обчислити таке значення межі інтегрування a прямого оператора (1.1), за якого похибка його апроксимації не перевищить величини, кратної похибці поля $\|\varepsilon(x;n)\| + \|\varepsilon(x;a)\| \le l\delta,\ l \le 5$, де $\varepsilon(x,a)$ – точність скінченновимірного проектування, $\varepsilon(x,n)$ – точність чисельного інтегрування (додатковий член формули чисельного інтегрування). Якщо поле $u_\delta(x)$ задано на інтервалі $[c_0, c_3]$ так, що виконується вкладання $[c_0 - a - \Delta x/2, c_3 - a - \Delta x/2] \ge [c_1, c_2]$, то інтервал є майже необмеженим, в іншому разі – *істотно обмеженим*.

У першому випадку за співвідношенням (1.1) непогано відновлюється контакт, у іншому – надійно відновити контакт з допомогою ітерацій з ядром Пуассона неможливо і необхідно застосовувати інші, більш швидкозбіжні схеми обчислень[2].

Моделлю геологічної будови для вищезгаданої задачі є два зіркові відносно нескінченно віддаленої точки однорідні циліндричні шари різної щільності σ, що залягають один над одним й обмежені смугою

$$\Pi = \{< x, \zeta >: -\infty < x < \infty; h_1 < \zeta(x) \le h_0\}, \tag{1.10}$$

де $h^- = \inf \zeta(x)$, $h^+ = \sup \zeta(x)$ – глобальні екстремуми контакту $\zeta(x)$, а $h_1 = \inf\{h^-\}$ і $h_0 = \sup\{h^+\}$ – постійні, описують множину контактів $\zeta(x)$ зі смуги (1.10) при $0 < h_1 \le \zeta(x) \le h_0$, $x \in R^{(1)}$ (рис. 1.3).

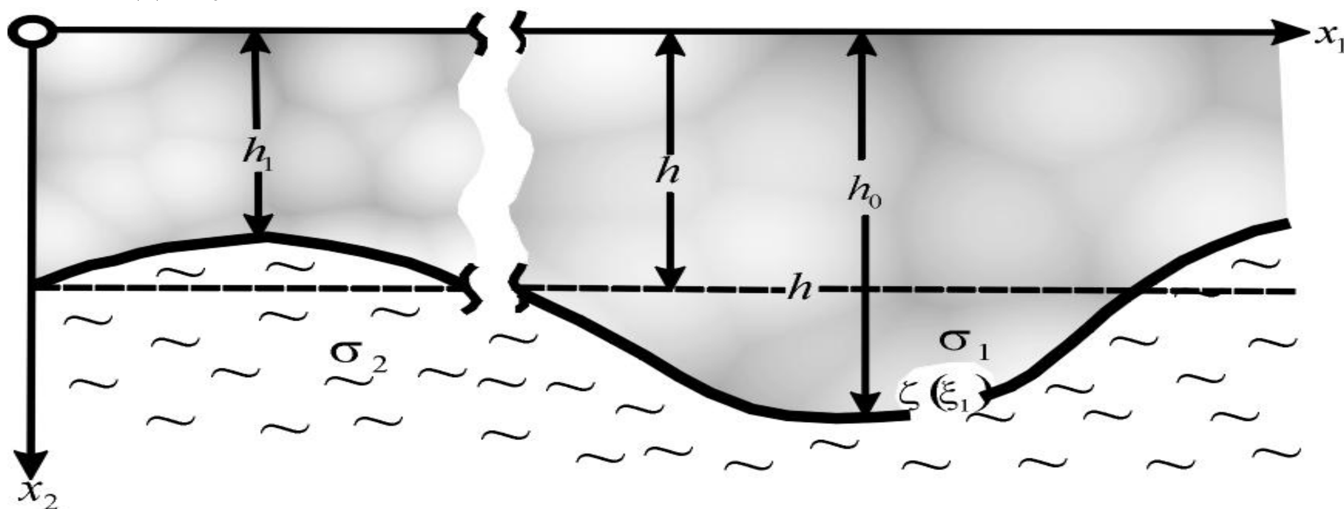


Рис. 1.3. Модель геологічної будови для визначення контакту способом Нумерова.

Якщо в класі Страхова $St(1, \Pi)$ [76] виділити на підставі співвідношень

$$\omega(\zeta) < \zeta(x),\ \omega(\zeta) = h^+ - h^-, x \in R^{(1)}, \tag{1.11}$$

$$0.6h \le |\zeta(x)| \le 1.4h,\ 0 < h^- \le h \le h^+, \tag{1.12}$$

що обмежують "коливання" $\omega(\zeta)$ контакту, деякий компактний клас Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ то, як показано в [21, 103], для контактних границь, описаних функціями з цього класу, головну роль у гравітаційному притяганні підземних мас відіграє перша складова в лівій частині рівняння (1.1) , а друга – лише роль деякої малої поправки до неї. Наслідком цього є можливість подати на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ нелінійне рівняння (1.1) з точністю $\zeta^2(x) = [\eta(x) - h]^2$ лі-

[2] Одну з таких схем для рівняння (1.1) якраз і наведено в роботі [77].

нійним інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду з ядром Пуассона

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi = v(x), v(x)=u(x)-h, x\in R^{(1)} \quad , \tag{1.13}$$

розв’язок $\zeta(x), x\in R^{(1)}$ якого на класі Нумерова існує і єдиний при заданні правої частини на довгому профілі. Наша задача полягає у відновленні контакту при обмеженнях (1.10-1.12) за полем, заданим на “необмежених” $[c_0, c_3]$ і *істотно обмежених* $[c_1, c_2]$ множинах. Для відновлення контакту при заданні поля на *істотно обмежених* множинах рекомендується еквівалентне рівнянню (1.13) лінеаризоване рівняння зі швидкоспадним ядром Шварца [21]:

$$\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\text{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta(\xi)d\xi = w(x), \tag{1.14}$$

$$w(x)=v(x)-\frac{1}{4\pi h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\text{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt\int_{c_0}^{c_3}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}v(\xi)d\xi\ ,$$

розв’язок якого існує (як наслідок лінеаризації) і єдиний. Це не єдиний шлях визначення наближень $\zeta(x,h)$: за належності шуканого розв’язку до компакту $\zeta(x)\in Nu^{(1.\alpha)}(1,\Pi)$ лінійне наближення контакту $\zeta(x,h)$ є сумою розв’язків $\zeta(x,h)=S^+(x,h)+S^-(x,h)$ лінійних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2h}\int_{c_1}^{c_2}S^+(\xi,h)\left(\text{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi = u(x)\ ,\ \frac{1}{2h}\int_{c_1}^{c_2}S^-(\xi,h)\,\text{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi = u(x) \tag{1.15}$$

Існує ще один варіант знаходження наближення $\zeta(x,h)$ через розв’язання рівняння

$$\zeta(x,h)=2S^+(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}v(\xi)d\xi\ , \tag{1.16}$$

де $S^+(x,h)$ визначено з першого рівняння системи (1.15). Таке наближення відрізняється від точного розв’язку $\zeta(x)$ рівняння (1.1) не більше за квадрат відхилення $\zeta(x)=\eta(x)-h$, $h^-\le h\le h^+, x\in R^{(1)}$, однак значно гірше за якістю від наближень (1.15) через наявність інтегралу з повільноспадним ядром Пуассона. Розв’язки рівнянь (1.13-1.16) залежать від апріорі невідомої *середньої глибини* до контакту h (що, до речі, є наслідком модельних зображень складних середовищ, а не принциповою характеристикою задачі). Її значення з геологічних міркувань не завжди відомі надійно, тому важливо розробити спосіб знаходження контакту, у якому було б усунуто подібну параметричну залежність. Цього можна досягнути шляхом введення нових узагальнених співвідношень для контакту

$$\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,x)d\xi = u(x),\ \zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x), \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{4\zeta(x)}\int_{c_1}^{c_2}\left(\text{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}\zeta(\xi,x)d\xi = w(x,\zeta(x)), \tag{1.18}$$

де $$w(x,\zeta(x))=u(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{c_0}^{c_3}\frac{2k\zeta(x)}{(2k\zeta(x))^2+(\xi-x)^2}u(\xi)d\xi\ ,$$

Подібна заміна справедлива й для рівнянь (1.15) і (1.16). Практична значимість цих виразів полягає в можливості отримувати значення глибин контакту в кожній фіксованій точці рівномірної мережі в ході ітераційного поліпшення моделі, що надійніше, ніж підстановка апріорних значень h. Співвідношення (1.13-14, 1.17-18) цілком працездатні і у випадку магнітоактивних контактів, коли в їхніх правих частинах стоятимуть похідні напруженості магнітного потенціалу; контакт відновлюють із системи спряжених рівнянь типу (1.15) як суму значень

$$u(x,-h)=S^{+}(x,h)+S^{-}(x,h);\ u(x,h)=S^{+}(x,h)-S^{-}(x,h).$$

Ця обставина відкриває перспективи для комплексної інтерпретації гравімагнітних полів і вимагає ретельнішого вивчення.

Крім того, в дисертації (автореферат якої подано як [21]), наведено також відповідні формули для постановки контактної задачі в просторовому випадку, що теж є результатом досліджень за останні роки. Наведемо тут лише вигляд просторової моделі контакту (рис. 1.4) та основні вирази відповідної задачі.

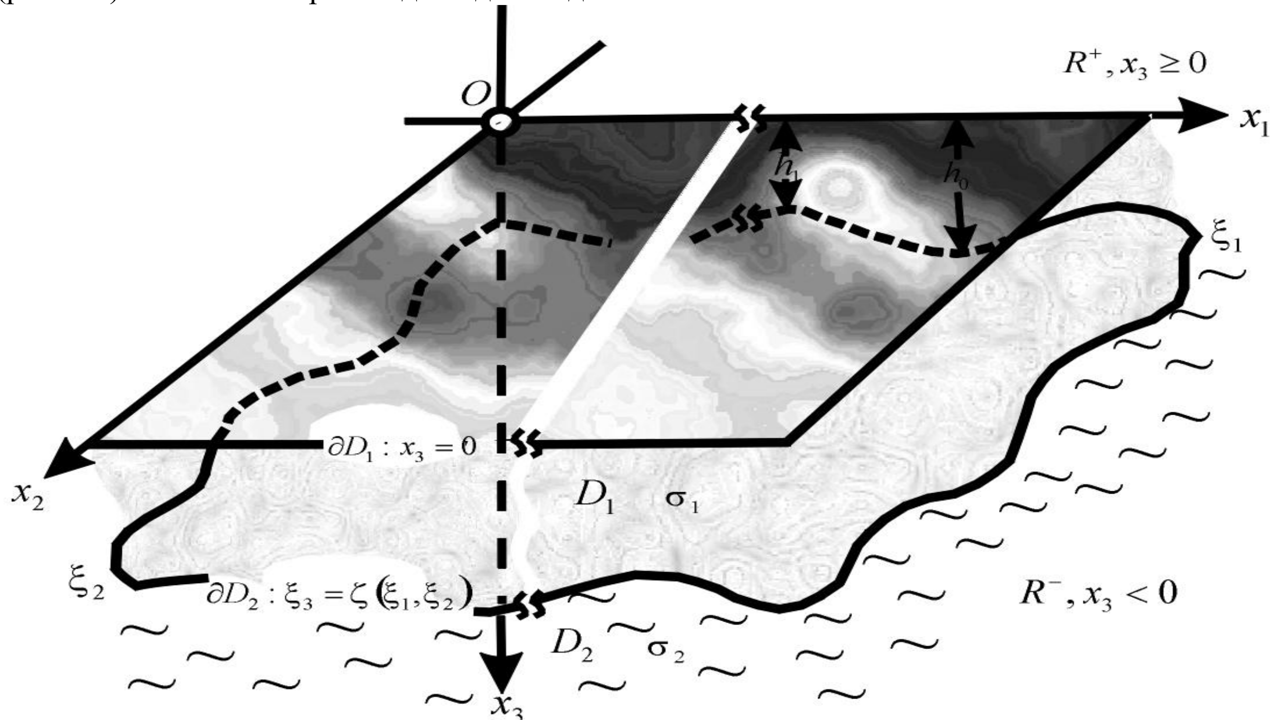


Рис.1.4. Просторовий вигляд моделі контакту.

Отже, з інтегрального рівняння контактної поверхні $\zeta(\xi,\eta)$ у постановці Нумерова

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x,y)-\gamma\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\Bigg|_{\zeta=\zeta(x,y)}^{\zeta(\xi,\eta)}d\xi d\eta=V_z(x,y,z).$$

після нескладних спрощень маємо для обох постановок Нумерова і Заморєва наступні вирази

$$\gamma\sigma\iint\limits_{S}\frac{[H(\xi,\eta)-z]\cdot u(\xi,\eta)}{\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+[H(\xi,\eta)-z]^2\right\}^{3/2}}d\xi d\eta=V_z(x,y,z),\ u(\xi,\eta)=\zeta(\xi,\eta)-H(\xi,\eta),$$

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x,y)+\gamma\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[\zeta(x,y)-z]\cdot u(x,y,\xi,\eta)}{\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+[\zeta(x,y)-z]^2\right\}^{3/2}}d\xi d\eta=V_z(x,y,z),$$

$$u(x,y,\xi,\eta)=\zeta(\xi,\eta)-\zeta(x,y),$$

справедливі з точністю до членів другого порядку малості за умови $\frac{u}{H-z}<<1$, де $H=H(\xi,\eta)$ чи $H=\zeta(x,y)$, відповідно. Перше рівняння лінійне, а друге переходить в лінійне, якщо звести його до формулювання Б.В. Нумерова й спростити вигляд. Подальше переведення отриманих вище виразів на „просторові рейки” і чисельна регуляризація відповідних дискретних співвідношень становитиме основу подальших досліджень.

1.3. Альтернативна постановка контактної задачі. У працях [78-81, 105] структурну задачу гравіметрії трактовано як задачу визначення за даними спостережень контуру необмеженого зіркового тіла, близького до шару постійної товщини. Основним рівнянням задачі в цій постановці є співвідношення (1.2), одержане Б. В. Нумеровим понад 70 років то-

му. Для відновлення границі ∂D_2 : $y = \zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$ збурювального тіла відомої сталої густини σ за значеннями похідних логарифмічного потенціалу, заданими на множині єдиності, або, що те ж саме, для розв'язування нелінійного інтегрального рівняння (1.2) запропоновано [105] такий спосіб. Розв'язок рівняння (1.2) відшукують у вигляді границі послідовності розв'язків певної послідовності лінійних інтегральних рівнянь першого роду, що апроксимує вихідне нелінійне рівняння. Встановлено, що оператори послідовності лінійних рівнянь є обмеженими, неперервними і компактними в просторах функцій, які найчастіше використовуються при розв'язуванні обернених задач потенціалу. Виконано спектральний аналіз операторів, на основі якого вказано ефективні критерії належності вихідних даних і розв'язків відповідним їм області значень оператора і області визначення нормальних розв'язків. Доведено локальні теореми існування та стійкості розв'язків задачі визначення необмежених зірчастих областей, близьких до заданих. Показано, що задачу поставлено коректно тільки на компактних множинах банахових просторів вихідних даних та розв'язків. Внаслідок умовної її коректності для отримання ефективного розв'язку слід застосовувати спеціальні регулярні методи. В основі підходу закладено теорію згладжувального функціоналу над просторами даних і розв'язків. Детально вивчено його складові: функціонали нев'язки або функціонали типу нев'язки та стабілізатори [78]. Показано, що функціонали нев'язки чи типу нев'язки лінійного інтегрального рівняння першого роду з невід'ємним компактним оператором є строго випуклими, двічі неперервно диференційованими функціями. Множини точок мінімумів функціоналів над гільбертовим простором даних є множинами другої категорії по відношенню до множини всіх точних (нормальних) розв'язків інтегрального рівняння (множини єдиності). Тому не кожна послідовність, яка мінімізує функціонали, збігається до множини єдиності, через що задача пошуку мінімуму функціоналів над гільбертовим простором даних є *некоректною*. Недостатніми є й додаткові вимоги, які широко використовують, стосовно мінімальності норми розв'язку при мінімізації функціоналів нев'язки. Для орієнтування пошуку нормального розв'язку рівняння за допомогою мінімізації функціоналів нев'язки й типу нев'язки запропоновано спеціальні стабілізатори, визначені на множині єдиності. Їх конструюють за допомогою певних диференціальних операторів, власні функції яких тісно пов'язані з власними функціями операторів прямої відповідності в задачах визначення зірчастих областей. Спеціальні стабілізатори — це невід'ємні, сильно випуклі, двічі неперервно диференційовані функціонали, що не мають локальних мінімумів, окрім глобального. Вперше встановлено існування такого регуляризуючого оператора для лінійного інтегрального рівняння першого роду, який серед відомих його модифікацій має найкращу обумовленість. Кожній функції з гільбертового простору даних оператор ставить у відповідність функції гільбертового простору розв'язків, що мають узагальнену похідну, яка інтегрується з квадратом. У свою чергу, кожна з функцій, яку обчислюють за допомогою цього оператора, є екстремаллю згладжувального функціоналу, який є зваженою сумою функціоналу типу нев'язки з одним із запропонованих стабілізаторів, що забезпечують однозначну розв'язуваність вихідних задач. Глобальні регуляризуючі оператори визначення зірчастих областей, близьких до шару постійної товщини, будують у вигляді послідовності локальних регуляризуючих операторів для відповідних послідовностей лінійних інтегральних рівнянь першого роду, в правих частинах яких використовують згладжені вихідні дані. У свою чергу, локальні регуляризуючі оператори для лінійних інтегральних рівнянь конструюють у вигляді параметризованих послідовностей, що мінімізують згладжувальні функціонали [79].

1.4. УТОЧНЕННЯ КЛАСИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ КОНТАКТУ. В статті [99] наведено стійкі способи уточнення апроксимації Андреєва [7] та інших, що, як там доведено, з неї випливають. Нехай $u(x)$ – вертикальна складова напруженості поля $U_{x_2}(x)$, а розв'язок $\zeta(x,h) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ є її аналітичним продовженням в бік тяжіючих мас на *середню глибину* $h = \zeta(x)$ шуканого контакту:

$$\zeta(x)=u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi\approx\zeta(x;h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi)-h]d\xi\,. \quad (1.19)$$

Тлумачачи рівняння (1.1) через інтеграл Пуассона, маємо $u_i(x,h)=\zeta(x),\ u_e(x,h)=-\zeta(x)$, та

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi \quad (1.20)$$

Апроксимацію $\zeta(x,h)$ розв'язку $\zeta(x,h)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ з точністю до квадрату величини $h^{-1}\omega(\xi)$, де $\omega(\xi)=h^+-h^-$, визначаємо значенням каліброваного поля на рівнях $y=0$ і $y=-h$ [57]: на першому рівні їх задають, а на іншому обчислюють як аналітично продовжену в бік тяжіючих мас гармонічну функцію за заданими граничними значеннями.

За виразом (1.20) не можна строго визначити функцію $u(x,h)$ через аналітичне продовження значення $u(x)$ на рівень $y=h>0$, оскільки відповідна йому пряма $y=h$ розтинає тяжіючі маси надвоє, одна з частин якої при $\zeta(x)\le h$ виявляється *нижче* рівня $y=h$, тому функція $u(x,y)$ при $y<h$ – негармонічна. Формально продовживши через інтеграл Пуассона

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi \quad (1.21)$$

"контакт" $u(x)$ до рівня $y=h$, тлумачимо отримане значення $u(x)$ як граничне значення поля мас, сконденсованих на рівні $y=h$. Значення $\zeta(x,h)$ знаходимо як границю послідовності $\{\zeta_n(x,h)\}$ функцій при розв'язанні рівняння (1.21), генерованих запропонованим процесом [21] послідовних наближень Лаврентьєва - Андреєва

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,x)d\xi+v(x),\ \zeta_0(x,h)\equiv v(x)=u(x)-h,\ n=0,\infty \quad (1.22)$$

Такий алгоритм обґрунтовує доведена в [99] теорема.

Теорема Андреєва. *Якщо розв'язок нелінійного інтегрального рівняння для контакту* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$*, то його лінеаризоване наближення обчислюється з виразу*

$$\zeta^{(n)}(x,h)=\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi,x)d\xi\,, \quad (1.23)$$

й від істинного ухиляється не більш, ніж на $h^{-2}\omega^2(\xi)$ *при* $h\to\infty$.

З останнього виразу при $n=0,1,2$ очевидні, як окремі випадки, відомі формули наближень Нумерова [44], Х`юза [119] і Страхова, відповідно:

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi)d\xi, \quad (1.24)$$

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi\,, \quad (1.25)$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi\,, \quad (1.26)$$

де $\Delta u(\xi)=u(\xi,0)-u(x,0)$. Останні дві формули як і (1.23) при $n\ge 3$ непридатні для обчислень через наростання похибок з номером ітерації при обчисленні в околі точки $\xi=x$; уникають цього, підсумовуючи ядра інтегралів з різними знаками і зростаючими біномними коефіцієнтами. Подібне не властиво для (1.24); перетворення формул з індексами $n>0$ (підсумування елементарних дробів в ядрах перетворень) за схемою (1.23) при $n=1,2,3$ визначає додатні ядра перетворень, а при $n=4$ – ні, тому в практиці обчислень наближень контакту $\zeta^{(n)}(x,h)$ (1.24) є нульовим наближенням, а обмежитись варто однією з наступних формул [18]:

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\cdot\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi, \qquad (1.27)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi.$$

Значне уточнення зазначених наближень досягається через поправки до відомих способів наближень Малкіна і Сенька, суть яких стисло окреслено в доведених в [99] теоремах, а детальніше виписано наприкінці статті [18].

Теорема Малкіна. *Корекція кожного з лінеаризованих наближень* (1.23) $\zeta^{(n)}(x,h)$ *на величину поправки*

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi, \qquad (1.28)$$

підвищує точність наближень $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$ *до* $h^{-3}\omega^3(\xi)$; *в практиці обчислень достатньо подати поправку* $\Delta\zeta(x,h)$ *у вигляді* $\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=u(\xi_0)\dfrac{\partial u(x,-h)}{\partial y}$, *де* $u(\xi_0)$ - *деяке «середнє» значення поля на поверхні спостережень.*

Теорема Сенька. *Уточнення кожного з наближень* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *поправкою, яка є розв`язком лінійного інтегрального рівняння* 1*-го роду*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi=v(x), \text{ де}$$

$$v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi$$

підвищує точність наближень $\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)}$, $k=0,1,2,3...$ *до величини* $\Delta\zeta_0^2\left(h^+\right)^{-3}, \zeta_0=\max\limits_x\left|\Delta\zeta(x)\right|$.

А. К. Маловичко [40] запропонував природне узагальнення ітерацій Б. В. Нумерова й А. К. Сенька для уточнення контакту, яке на підставі ітераційного процесу (1.22) нам вдалося удосконалити. Узагальнюючи поправки Андреєва і Сенька, запропоновано альтернативний спосіб, суть його в обчисленні послідовних наближень $\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)+\Delta\zeta_n(x)$, $\Delta\zeta_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$ за ітераційним процесом, названим в [21] процесом Нумерова - Маловичка:

$$\zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x,h),\ k=0,1,2,3...,\ h^-\le h\le h^+,$$

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),\ m=\overline{0,\infty},\ n=\overline{0,\infty} \qquad (1.29)$$

Теорема Маловичка. *Якщо* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *то послідовні наближення* $\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)+\Delta\zeta_n(x,h)$, $h^-\le h\le h^+$, *генеровані ітераційним процесом* (1.29), *збігаються при* $n\to\infty$ *до граничної функції* $\zeta(x)$, *незалежної від параметра* h, *зі швидкістю геометричної прогресії.*

Доведення ґрунтується на тому, що процес (1.29) за індексом m є процесом Лаврент-

єва - Андреєва та збіжності $\zeta_n(x,h)$ з відповідною мажорантою прогресії.

Кожен спосіб по суті зводиться до розв`язання окремого лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з ядром Пуассона за допомогою чисельних методів [8]. Результати чисельної перевірки деяких з цих способів та порівняння їх ефективності щодо запропонованих вище засобів розв'язання контактної задачі на короткому профілі запропоновано в останньому розділі дисертації [21] та наведено реферативно в останньому пункті даного розділу.

1.5. Методи розв'язання контактної задачі. Розв'язність рівняння (1.13) досліджував Б. А. Андреєв і для його розв'язання запропонував спосіб послідовних наближень [7], а М. М. Лаврентьєв [34] обґрунтував його застосовність для розв'язку операторних рівнянь першого роду[3], а згодом для рівнянь (1.13) і (1.17) в працях [103, 21] запропоновано ітераційні процеси Лаврентьєва-Андреєва

$$\zeta_{n+1}^{(1)}(x)=\zeta_n^{(1)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n^{(1)}(\xi)d\xi+v(x),\ \zeta_0^{(1)}(x)=v(x)\ , \tag{1.30}$$

$$\zeta_{n+1}^{(1)}(x)=\zeta_n^{(1)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{\zeta_n^{(1)}(x)}{\left(\zeta_n^{(1)}(x)\right)^2+(\xi-x)^2}\zeta_n^{(1)}(\xi)d\xi+u(x), \zeta_0^{(1)}(x)=u(x) \tag{1.31}$$

Розв'язність рівнянь (1.14, 1.18) вперше досліджена А. В. Чорним [103], а для обчислення їх розв'язків в [21] введено нові ітераційні процеси, названі процесами Лаврентьєва - Чорного

$$\zeta_{n+1}^{(2)}(x)=\zeta_n^{(2)}(x)-\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta_n^{(2)}(\xi)d\xi+w(x),\quad \zeta_0^{(0)}(x)=w(x), n=0,1,2,...,\infty \tag{1.32}$$

$$\zeta_{n+1}^{(2)}(x)=\zeta_n^{(2)}(x)-\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n^{(2)}(x)}\right)^{-1}\zeta_n^{(2)}(\xi)d\xi+w^{(n)}(x),\quad \zeta_0^{(0)}(x)=u(x), n=0,1,2,...,\infty \tag{1.33}$$

$$w^{(n)}(x)=u(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{c_0}^{c_3}\frac{2k\zeta_n^{(2)}(x)}{\left(2k\zeta_n^{(2)}(x)\right)^2+(\xi-x)^2}u(\xi)d\xi$$

Дослідження збіжності цих процесів елементарне (індукцією за збіжності мажоруючих часткових сум) внаслідок еквівалентного подання розв'язків через наступні наближення:

$$\zeta_n^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{c_2}v(\xi)d\xi\int_0^k\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k\cos\omega(\xi-x)d\omega\,, \tag{1.34}$$

$$\zeta_n^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{c_2}w(\xi)d\xi\int_0^k\sum_{k=0}^{n}\left(1-(2\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)^k\cos\omega(\xi-x)d\omega,\ n=\overline{0,\infty} \tag{1.35}$$

Твердження про збіжність цих наближень водночас, згідно [41], є конструктивними теоремами існування розв'язків рівнянь (1.13) і (1.17); аналогічні співвідношення, чисельно складніші, виведено для узагальнених рівнянь (1.14) і (1.18). Вивчення швидкості збіжності різних ітерацій[4] для рівнянь (1.34) і (1.35) виявило, що послідовні наближення Лаврентьєва - Андреєва $\left\{\zeta_n^{(1)}(x)\right\}$ і Лаврентьєва - Чорного $\left\{\zeta_n^{(2)}(x)\right\}$ рівномірно збігаються до граничної функції $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, яка задовільняє кожному з двох еквівалентних рівнянь (1.13) і (1.17) зі швидкістю геометричної прогресії, оціненої , відповідно, величинами

$$\left|\zeta_{n+1}^{(1)}(x)-\zeta_n^{(1)}(x)\right|\le\frac{M(h)}{h(n+2)};\ \left|\zeta_{n+1}^{(2)}(x)-\zeta_n^{(2)}(x)\right|\le\frac{2M(h)}{h(n+2)},$$

а модулі неперервності обернених операторів цих рівнянь оцінено як

---

[3] Ці обставини відбито у назві запропонованих в [21] ітераційних процесів.

[4] Відсутність таких даних заважала оцінці їх чисельної ефективності і можливості порівняння різних алгоритмів з метою вибору оптимального для розв'язуваної задачі.

$$\left|\zeta(x)-\zeta_n^{(1)}(x)\right|\leq\frac{N^{(1)}(h)}{h(n+2)};\ \left|\zeta(x)-\zeta_n^{(2)}(x)\right|\leq\frac{N^{(2)}(h)}{h(n+2)},$$

де $M(h)=2\max|\zeta(x)|$; $N^{(1)}(h)=2\max|v(x,2h)|$; $N^{(2)}(h)=2\max|w(x)+w(x,2h)|$, $x\in R^{(1)}$,а $v(x,2h)$ і $w(x,2h)$ – аналітично продовжені значення $v(x)$ і $w(x)$ як гармонічних функцій з рівня $y=0$ на рівень $y=2h$. Схожий результат справедливий і для узагальнених рівнянь контакту.

Порівняння наведених модулів неперервності вказує обернену пропорційність швидкості збіжності ітерацій глибині h і майже однаковий її порядок для обох процесів за невеликої (усього вдвічі) переваги у швидкості збіжності процесу (1.32) над процесом (1.30). В обох процесах швидкість спадає з наростанням глибини h й індексу ітерації n, але практично ітераційний процес Лаврентьєва - Чорного має перевагу над “андрєєвським”: завдяки швидкому згасанню по горизонталі ядер перетворень (1.32) для відновлення наближень $S(x,h)$ з *визначеною точністю* можна обмежитись значеннями поля $u(x)$ на істотно коротших профілях, ніж за використання будь-яких схем з ядром Пуассона. Однак, останніми за певних умов можна користуватись, істотно прискоривши їх збіжність.

1.6. Постановка і розв’язність задачі в комплексній області. Вище ми довели коректність постановки контактної задачі, яка описується інтегральним рівнянням (1.1), що залежить єдино лише від густини аномалієтвірного шару, на заданому класі $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma,\Pi)$ $=S_{loc}(D)\times C^{(k,\alpha)}\left(R^{(1)}\right)$ в дійсній площині. Згадані здобутки, як показано в праці [98], цілком можна поширити і на комплексну область. Дійсно, ще в роботі [103] така задача (1.6) була редукована до розв’язання на класі $Nu^{(k,\alpha)}(1,\Pi)$ нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона, яке в комплексній площині $z=x+iy$ має такий вигляд [104]:

$$-\frac{s_0-\bar{s}_0}{2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-s_0+\bar{s}_0}{s-z}ds=u(z), \tag{1.36}$$

де $u(z)=G(z)/\pi f\sigma$ – калібрована напруга $G(z)$ поля логарифмічного потенціалу притягання $U(z)$ за виразом (1.3), f – гравітаційна стала; σ – густина активного шару, $G(z)=\dfrac{\partial U(z)}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}-i\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)$; $s_0=x+i\zeta(x)$, $s=\xi+i\zeta(\xi)$ – відповідно фіксована точка контура ∂D і точка, що його пробігає, а $\bar{s}_o=x-i\zeta(x)$, $\bar{s}=\xi-i\zeta(\xi)$ – спряжені з ними точки. Перетворимо це рівняння до зручного для порівняння з поданням (1.9) вигляду. Оскільки, як доведено в [97],

$$\int\limits_{\partial D_2}\frac{ds}{s-z}=\begin{cases}+i\pi,\ z\in D^+,\\-i\pi,\ z\in D^-,\end{cases} \tag{1.37}$$

де D^+ – область над кривою ∂D_2, а D^- – під ∂D_2, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-2(s_0-\bar{s}_0)}{s-z}ds=u(z).$$

Якщо ж серед множини обмежених знайдеться крива ∂D_2, що має асимптоту h ліворуч й праворуч, то, взявши у співвідношенні (1.36) $\bar{s}-\bar{s}_0=\lim\limits_{|x|\to\infty}i\zeta(x)=2ih$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-4ih}{s-z}ds=u(z)\ \text{або ж}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-2ih}{s-z}ds=u(z)+ih\,.$$

Порівнюючи останній вираз з рівнянням Страхова (1.9), дійдемо висновку, що це рівняння є *частинним випадком* від наведеного (1.36), в якому до того ж *не враховується* (як і у попередньому рівнянні (1.8)) притягання шаром постійної товщини h. Окрім того, подання (1.9) від рівняння (1.36) суттєво відрізняється не тільки тим, що воно описує значно *вужчу* мно-

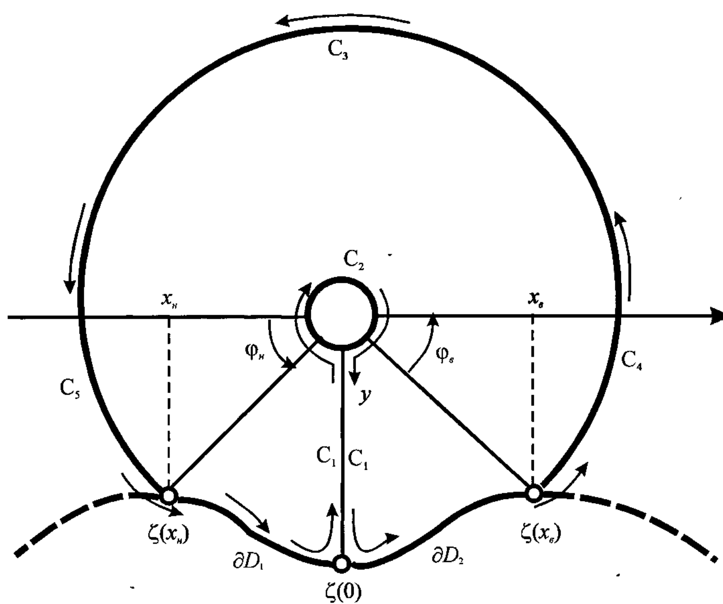
жину можливих контурів збурювальних шарів, а й, головне, тим, що воно залежить від параметра *h*, якому в теорії [60, 71-74] надано визначальну роль.

Розв’язування рівняння (1.36) розпочнемо з обґрунтування співвідношення (1.37).

Лемма 1.1. *Якщо контур* ∂D: $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ *належить до класу неперервно диференційованих (за Гельдером) функцій* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *то* $\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\dfrac{ds}{s-z}=\begin{cases}+1, & z\in D^{+},\\ -1, & z\in D^{-}\end{cases}.$

Доведення проведемо для випадку, коли $z\in D^{+}$. Оскільки функція виду $f(s)==1/(s-z)$ є аналітичною в незамкненій області $D^{+}\setminus\{z\}$ з виколотою точкою $z=x+iy$, то на основі відомої теореми Коші [35] інтеграл, що нас цікавить, можна подати в такому вигляді (рис. 1.5):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\frac{ds}{s-z}=\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{x_у\to-\infty\\ x_в\to+\infty}}\left(\int_{\partial D_1^*}\frac{ds}{s-z}+\int_{\partial D_2^*}\frac{ds}{s-z}\right)=\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{x_у\to-\infty\\ x_в\to+\infty}}\left(\int_{c_1}\frac{ds}{s-z}-\int_{c_1}\frac{ds}{s-z}+\int_{c_2}\frac{ds}{s-z}-\int_{c_3}\frac{ds}{s-z}-\int_{c_4+c_5}\frac{ds}{s-z}\right),$$



де ∂D_1^* і ∂D_2^* — частини контуру ∂D між точками $(x_н,\zeta(x_н))$, $(0,\zeta(0))$ і $(x_в,\zeta(x_в))$; C_1 – розтин між точками $z=(0{,}0)$ і $(0,\zeta(0))$; C_2 і C_3 – коло радіуса $\varepsilon=|s-z|$ й концентричне до нього півколо радіуса $R=|\bar{s}-z|$ з центром у точці $z=(0{,}0)$; C_4 і C_5 – дуги секторів, кути розхилу яких відповідно дорівнюють:

$$\varphi_н=\operatorname{arctg}\frac{\zeta(x_н)}{x_н}=-\operatorname{arctg}\frac{R}{|x_н|\sqrt{1+(x_н/\zeta(x_н))^2}}\Bigg|_{|x}$$

,

$$\varphi_в=\operatorname{arctg}\frac{\zeta(x_в)}{x_в}=-\operatorname{arctg}\frac{R}{|x_в|\sqrt{1+(x_в/\zeta(x_в))^2}}\Bigg|_{|x_в|\to\infty}\to 0. \qquad (1.38)$$

Криволінійні інтеграли за дугами ∂D_i^*, $i=1{,}2$, очевидно, *існують* тільки тоді, коли контур $\zeta(x)$ *належить* до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. У цьому випадку величину

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D_1^*+\partial D_2^*}\frac{ds}{s-z}=\frac{1}{\pi i}\left(\int_{x_н}^{0}\frac{1+i\zeta'(\xi)}{\xi+i\zeta(\xi)-z}d\xi+\int_{0}^{x_в}\frac{1+i\zeta'(\xi)}{\xi+i\zeta(\xi)-z}d\xi\right)$$

цілком визначають фіксованими числами x_H і $x_в$, а її границю при $x_H\to-\infty$, $x_в\to\infty$ з урахуванням відношень (1.38) знаходять так:

$$\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ R\to-\infty}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon ie^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}}-\int_0^{\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}-\int_{2\pi-\varphi_н}^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}-\int_{\pi}^{\pi+\varphi_н}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}\right)=1$$

Випадок, коли $z\notin D^{+}$, розглядають аналогічно.

На основі доведеної леми 1.1 нелінійне інтегральне рівняння (1.36) подамо у вигляді

$$-\left(s_0-\bar{s}_0\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds=u(z) \qquad (1.39)$$

зручнішому для подальшого дослідження. Далі в статті [98] наводиться наступна теорема.

Теорема 1.1. *Якщо контур* ∂D: $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ *належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *тобто задовольняє вимогам* $\|\zeta(x)\|_C\le M$; $\|\zeta'(x)\|_C\le m$, $m,M<\infty$, *то оператор прямої задачі*

$$A(\zeta;z)=-\left(s_0-\bar{s}_0\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds$$

є обмеженим, неперервним і компактним оператором на $C\left(R^{(1)}\right)$.

Доведення *обмеженості* оператора випливає з очевидної оцінки

$$\left|A(\zeta;z)\right|=\left|2i\zeta(x)+\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}\frac{\zeta(\xi)}{s-z}ds\right|\le 3\|\zeta(x)\|_C\left|\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}\frac{ds}{s-z}\right|\le 3M .$$

Для доведення його *неперервності* розглянемо різницю

$$A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)=-2i\eta(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s^*-\bar{s}^*}{s^*-z}ds^*-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds ,$$

де $s^*=\xi+i\zeta+i\eta=s+i\eta$, ∂D^*: $y=\zeta(x)+\eta(x)$, $x\in R^{(1)}$; $\eta(x)$ – достатньо мала варіація функції $\zeta(x)$ у тому сенсі, що функція $\eta(x)$ для довільного числа $\varepsilon>0$ задовольняє вимогам

$$\|\eta(x)\|_C=\max_x|\eta(x)|<\varepsilon ; \qquad \eta(-\infty)=\eta(\infty)=0 .$$

Оскільки варіація $\eta(x)$ мала, то $\dfrac{1}{s^*-z}=\dfrac{1}{s-z}\dfrac{1}{1+i\eta/(s-z)}=\dfrac{1}{s-z}\left(1-\dfrac{i\eta}{s-z}+\left(\dfrac{i\eta}{s-z}\right)^2-...\right)$,

і тому $A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)=-2i\eta(x)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\dfrac{2i\eta}{s-z}ds-\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\dfrac{s-\bar{s}}{(s-z)^2}i\eta ds+...$, звідки неважко

вивести рівність $\left|A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)\right|\le\dfrac{7}{2}\|\eta(x)\|<7\varepsilon/2$, яка засвідчує неперервність оператора $A(\zeta;z)$ в $C\left(R^{(1)}\right)$ через те, що число $\varepsilon>0$ довільне.

К*омпактність* (*повна неперервність*) оператора $A(\zeta;z)$ означає, що він переводить довільну обмежену множину, зокрема клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, функцій в компактну (за метрикою $C\left(R^{(1)}\right)$) множину функцій $u(z)=A(\zeta;z)\in V(A)$. Раніше ми переконалися, що оператор $A(\zeta;z)$ обмежений на довільній обмеженій множині функцій, тому для $\zeta\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ матимемо $\|u(z)\|_C\le 3\|\zeta(x)\|_C$. Цією нерівністю встановлено *рівномірну обмеженість* множини $V(A)$. Доведемо *її одностайну неперервність*. Нехай $|z_1-z_2|<\varepsilon$ для довільного числа $\varepsilon>0$. Тоді різниці

$$u(z_1)-u(z_2)=2i[\zeta(x_2)-\zeta(x_1)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{s-\bar{s}}{s-z_1}-\frac{s-\bar{s}}{s-z_2}\right)ds$$

з урахуванням розгортання

$$\frac{1}{s-z_1}=\frac{1}{s-z_2}\frac{1}{1-(z_1-z_2)/(s-z_2)}=\frac{1}{s-z_2}\left(1+\frac{z_1-z_2}{s-z_2}+...+\left(\frac{z_1-z_2}{s-z_2}\right)^n+\frac{1}{s-z_1}\left(\frac{z_1-z_2}{s-z_2}\right)^{n+1}\right)$$

можна надати вигляду

$$u(z_1)-u(z_2)=2i[\zeta(x_2)-\zeta(x_1)]+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}(z_1-z_2)^k\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z_2)^{k+1}}ds+$$

$$\frac{(z_1 - z_2)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{s - \bar{s}}{(s - z_1)(s - z_2)^{n+1}} ds .$$

Проте функція $\zeta(x)$ неперервно диференційована на $R^{(1)}$ і, до того ж, $|x_1 - x_2| < |z_1 - z_2|$, через це норма різниці набирає вигляду:

$$\|u(z_1) - u(z_2)\|_C \le 2\|\zeta'(x)\|_C \,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{s - \bar{s}}{(s - z)^2} ds \right| < \varepsilon(2m + 1/2).$$

Одержана нерівність означає, що множина $V(A)$ функцій $u(z)$ є одностайно неперервною. За відомою теоремою Арцела [29], множина $V(A)$ є *компактною*, а оператор $A(\zeta; z)$ – *цілком неперервним* (*компактним*) у метриці простору неперервних функцій.

Визначальна роль доведеної теореми 1.1 для розв'язування рівняння (1.39) полягає в тому, що вона орієнтує напрям пошуку розв'язків за їх характеризацією. На конкретних елементах того чи іншого класу функцій можна показати, що *неперервна залежність розв'язку* інтегрального рівняння (1.39) від його правої частини *відсутня* не тільки в просторах *обмежених (східчастих) функцій*, а й у просторах *неперервних* $C(R^{(1)})$ або ж *інтегрованих* (*абсолютно* чи з *квадратом*) $L^{(k)}(R^{(1)})$, $k = 1,2$ *функцій*. Для того, щоб у цьому переконатися, досить розглянути значення оператора $A(\zeta; z)$ на певній послідовності неперервних функцій, що збігаються до тієї східчастої, яку розглянуто у праці [103]. Оператор $A(\zeta; z)$, як встановлено теоремою 1, неперервний принаймні на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$, і щонайменше тільки на цьому класі потрібно відшукувати розв'язок рівняння (1.39) для вхідних даних з просторів $C(R^{(1)})$ та $L^{(k)}(R^{(1)})$, $k = 1,2$, а наступні теореми обґрунтовують цю процедуру.

Теорема 1.2 (єдиності). *Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння (1.39), якщо він існує, єдиний на множині* $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ *неперервно диференційованих функцій.*

Дійсно, однорідне нелінійне рівняння

$$-(s_0 - \bar{s}_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{s - \bar{s}}{s - z} ds = 0 \tag{1.40}$$

на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ має тільки тривіальний розв'язок. У цьому нас переконує суперечлива нерівність $\|s_0 - \bar{s}_0\|_C = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{s - \bar{s}}{s - z} ds \right\|_C \le \frac{1}{2} \|s - \bar{s}\| \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\partial D} \frac{ds}{s - z} \right| \le \frac{1}{2} \|s - \bar{s}\|_C$, виведена на основі леми 1.1. Отже, однорідне рівняння (1.40) має тільки тривіальний розв'язок, а рівняння (1.39), якщо й має розв'язок, то він однозначно визначається на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$. З огляду на те, що довільну функцію $\zeta(x)$ з множини $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ можна подати у вигляді $\zeta(x) = \zeta(0) + \int_0^x \zeta'(t) dt$, ця множина є рівномірно обмеженою і водночас неперервною, тобто є *компактною* множиною функцій.

Теорема 1.3 (існування). *Процес послідовних наближень*

$$s_0^{(n+1)} - \bar{s}_0^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^{(n)}} \frac{s^{(n)} - \bar{s}^{(n)}}{s^{(n)} - z} ds^{(n)} - u(z),\ n = 0,1,2,...,;\ s^{(0)} - \bar{s}^{(0)} = u(z) \tag{1.41}$$

збігається на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ *до (нормального) розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (1.39) зі швидкістю геометричної прогресії.*

Для доведення цієї теореми достатньо показати збіжність ітераційного процесу (1.41) і визначити його швидкість. Твердження стосовно того, що гранична функція $\zeta(x)$ послідовності $\{\zeta^{(n)}(x)\}$ буде розв'язком нелінійного інтегрального рівняння (1.39), випливатиме з теореми єдиності розв'язку. Задля з'ясування збіжності послідовних наближень розглянемо різ-

ницю

$$\left(s_0^{(n+1)}-\bar{s}_0^{(n+1)}\right)-\left(s_0^{(n)}-\bar{s}_0^{(n)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\bar{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}$$

Для спрощення викладок позначимо $s_0^{(n+1)}-s_0^{(n)}=i\left(\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right)=i\eta^{(n)},\ n-0,1,2,...$, і, скориставшись тим, що прирости $\eta^{(n)}$ за метрикою простору неперервних функцій $C\left(R^{(1)}\right)$ набагато менші самих наближень $\zeta^{(n)}$ контуру ξ, матимемо $ds^{(n+1)}=ds^{(n)}+id\eta^{(n)},\ n=0,1,2,...$,

$$\frac{1}{s^{(n+1)}-z}=\frac{1}{s^{(n)}-z}\frac{1}{1+i\eta^{(n)}/\left(s^{(n)}-z\right)}=\frac{1}{s^{(n)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n)}}{s^{(n)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n)}}{s^{(n)}-z}\right)^2-...\right).$$

У цих позначеннях попередня рівність виглядає так:

$$\eta^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n)}-\zeta^{(n-1)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\right)^2-...\right)\left(ds^{(n-1)}+id\eta^{n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\right)^2-...\right)\left(ds^{(n1)}+id\eta^{(n-1)}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}.$$

Звідси з точністю до величин другого порядку щодо приростів $\eta^{(n)}$ отримуємо співвідношення $\eta^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}-\eta^{(n-1)}\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)}$, з якого встановлюємо нерівність

$$\left\|\eta^{(n)}\right\|_C\le\frac{1}{2\pi}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C\left|\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2}{s^{(n-1)}-z}-\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)}\right|\le\frac{1}{2}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C.$$

Ця нерівність слугує основою для наступного ланцюжка

$$\left\|\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right\|_C\le2^{-1}\left\|\zeta^{(n)}-\zeta^{(n-1)}\right\|_C\le2^{-2}\left\|\zeta^{(n-1)}-\zeta^{(n-2)}\right\|_C\le...\le2^{-n}\left\|\zeta^{91}-\zeta^{(0)}\right\|_C,$$

який, у свою чергу, засвідчує, що оператор $A(\zeta;z)$ задачі для контактної поверхні є *стискаючим*. Наближення $\zeta^{(n)}(x),\ n=0,1,2,...$, збігаються до розв'язку $\zeta(x)$ рівняння (1.39) зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником 2^{-n}.

Зауваження. Оператори $B\left(u,\zeta^{(n)};z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\bar{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-u(z)$ послідовності $\left\{B\left(u,\zeta^{(n)};z\right)\right\}$, яка, очевидно, апроксимує при $s_0^{(0)}-\bar{s}_0^{(0)}=u(z)$ обернений (нелінійний) оператор $A^{-1}(\zeta;z)$ рівняння для контактної поверхні, є *обмеженими, неперервними* і *компактними* операторами на компакті $V(A)$. Виявити ці властивості можна за допомогою засобів, які було застосовано під час досліджень оператора $A(\zeta;z)$ прямої задачі. До того ж, кожен з операторів $B\left(u,\zeta^{(n)};z\right),\ n=0,1,2,...$, проектує на нумерівську множину $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Переконуємось в цьому, переходячи у зображенні оператора до його параметричного подання, а саме

$$B\left(u,\zeta^{(n)};z\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{(n)}(\xi)\left(1+i\dfrac{d\zeta^n}{d\xi}\right)}{\xi+i\zeta^n(\xi)-z}d\xi-u(z).$$

Наявність у зображенні (інтегрованої) похідної $\frac{d\zeta^{(n)}(\xi)}{d\xi}$ від наближення $\zeta^{(n)}(\xi)$ контуру $\zeta(\xi)$, $\xi \in R^{(1)}$, є ознакою функції, що належить до множини $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Отже, в перебігу доведення теореми існування розв'язку знайдено таку послідовність $\{B(u,\zeta^{(n)};z)\}$ компактних операторів $B(u,\zeta^{(n)};z)$, $n = 0,1,2,...$, яка обмежену множину $V(A)$ функцій $u(z)$ однозначно проектує на компакт $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ і прямує за метрикою простору неперервних функцій $C(R^{(1)})$ на певному елементі $u(z)$ множини $V(A)$ до нелінійного оберненого оператора $A^{-1}(\zeta;z)$ рівняння для контактної поверхні.

Теорема 1.4 (стійкості). *Нехай функції* $\zeta_i(x)$, $x \in R^{(1)}$, $i = 1,2$, *що описують границі розподілу однорідних шаруватих середовищ, належать до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. *Якщо за достатньо малого числа* $\varepsilon > 0$ *поля* $u_i(z)$, $z \in R^{(1)}$, *які породжуються відповідно контурами* $\zeta_i(x)$, *підкоряються вимозі* $\|u_1(z) - u_2(z)\|_C \le \varepsilon$, *тобто їх вважають близькими, то самі границі також незначно відрізняються одна від одної в сенсі виконання умови* $\|\zeta_1(x) - \zeta_2(x)\|_C \le 2\varepsilon$.

Для доведення теореми розглянемо різницю

$$\zeta_1(x) - \zeta_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}} \frac{\zeta_1(\xi)}{s^{(1)} - z} ds^{(1)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(2)}} \frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(2)} - z} ds^{(2)} - u_1(z) + u_2(z).$$

Оскільки $$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}} \frac{\zeta_1(\xi) - \zeta_2(\xi)}{s^{(1)} - z} ds^{(1)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}} \frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(1)} - z} ds^{(1)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(2)}} \frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(2)} - z} ds^{(2)} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\partial D^{(1)}} \frac{\zeta_1(\xi) - \zeta_2(\xi)}{s^{(1)} - z} ds^{(1)} + \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2(\xi)\left[\frac{1 + i\zeta_1'(\xi)}{\xi + i\zeta_1(\xi) - z} - \frac{1 + i\zeta_2'(\xi)}{\xi + i\zeta_2(\xi) - z}\right] d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi}\|\zeta_1(\xi) - \zeta_2(\xi)\|_C \times$$

$$\times \left| \int_{\partial D^{(1)}} \frac{ds^{(1)}}{s^{(1)} - z} \right| + \frac{\|\zeta_2(\xi)\|_C}{2\pi}\left| \int_{\partial D^{(1)}} \frac{ds^{(1)}}{s^{(1)} - z} - \int_{\partial D^{(2)}} \frac{ds^{(2)}}{s^{(2)} - z} \right| = \frac{1}{2}\|\zeta_1(\xi) - \zeta_2(\xi)\|_C,$$

то $\|\zeta_1(x) - \zeta_2(x)\|_C \le 2\|u_1(z) - u_2(z)\|_C \le 2\varepsilon$.

Вищезгадані теореми окреслюють умови коректної розв'язності оберненої задачі логарифмічного потенціалу для контактної поверхні в комплексній площині. Задачу поставлено коректно на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервних разом з першими похідними функцій, бо на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок задачі існує, єдиний і стійкий. Особливість проведеного аналізу – редукція задачі до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння (1.39) типу рівняння Урисона. Ліву частину отриманого рівняння, залежного від невідомої функції, подано у вигляді двох складових, одна з яких – невідома функція – домінує (за нормою) над іншою, що є інтегральним оператором над невідомою функцією. Вигода такого подання (на зразок лінійного інтегрального рівняння другого роду) чітко вбачається в напрямі дослідження рівняння. По-перше, подання виявилося доступним для вивчення умов єдиності, існування та стійкості розв'язків винятково елементарними засобами. По-друге, виглядом рівняння визначився і спосіб його точного розв'язання. А з огляду на те, що точний розв'язок відшукують за допомогою певного процесу послідовних наближень, сконструйованого, у свою чергу на основі вихідного подання рівняння, це подання стає вирішальним і в практичній реалізації розв'язку задачі в умовах, коли праву частину рівняння задано з перешкодами на дискретній множині точок.

1.7. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. Основні результати з чисельної перевірки вищезгаданих алгоритмів здійснені в дисертації, де окреслено загальну стратегію вирішення некоректних задач, здійснено алгебраїзацію пропонованих алгоритмів і наведено, у рамках

регуляризації за Тихоновим, методику чисельного розв’язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, до вирішення якого зведено всі досліджувані процеси, подано результати чисельного тестування на комп’ютері та порівняльного аналізу тестових прикладів, отриманих за різними алгоритмами. Описано програму обчислень на комп’ютері наближених розв’язків поставленої задачі на рівномірній мережі вузлів. Згідно [21], характеристики прямих операторів $A(\zeta, x)$ задачі

$$\mathbf{A}\zeta \equiv \int_{c_1}^{c_2} K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi = u(x),\ c_0 \le x \le c_3 \qquad (1.42)$$

дозволяють, в разі точного задання його та правої частини, без проблем будувати таку послідовність компактних операторів, яка збігається на певному елементі класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ до точного розв’язку. Через нестійкість оберненого оператора внесено корективи в цю стратегію. Скінченновимірну апроксимацію системи (1.42) здійснено методом *проекцій*, що дозволяє зменшити розмірність системи, оскільки вхідна матриця симетрична і додатно визначена. В підсумку для операторів рівнянь (1.30) і (1.32) відповідно маємо з точністю похибок апроксимації:

$$A_m^P(h,x) \equiv P_m\ A^P(h,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a_m}^{a_m} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\zeta_n(\xi,h,m)d\xi\,,$$

$$A_m^S(h,x) \equiv P_m\ A^S(h,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a_m}^{a_m} \left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1}\zeta(\xi,h,m)d\xi\,, \qquad (1.43)$$

де похибки $\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C = \frac{1}{\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\frac{h^+}{(\xi - x)^2 + (h^-)^2}d\xi\right|,\ \left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h^+}\right)^{-1}d\xi\right|.$

З цих оцінок знаходять межі інтегрування a_m і за формулою Гауса 7-го ступеня точності (12 вузлів) здійснюють чисельне інтегрування. По завершенню дискретизації оператора $A_m(\zeta^{\alpha_0}; x, \varepsilon)$ отримуємо відносно шуканого вектора розв’язку $\vec{\zeta}(x_n)_{n=1}^m$ такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\sum_{j=1}^{m}\frac{\zeta(x_i)}{\zeta^2(x_i) + (\xi_j - x_i)^2}\zeta(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}u(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\sum_{j=1}^{m}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi_j - x_i)}{2\zeta(x_i)}\right)^{-1}\zeta(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}u(x_i). \qquad (1.44)$$

В ході регуляризації за Тихоновим ця система редукується до вирішення рівняння Ейлера

$$\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(x_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma(x_i)K_\delta(x_i,\xi_k)K_\delta(x_i,\xi_j)\zeta(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i K_\delta(x_i,\xi_k)u_\delta(x_i) \qquad (1.45)$$

за умов застосування квадратур Гауса $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i) + R(f_n)$ де залишковий член $R(f_n) = \int_{c_0}^{c_3} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)$ має смисл *похибки наближеного інтегрування* і дорівнює $R(f_n) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 f^{(2n)}(\eta),\ -1 < \eta < 1$. Для переходу від інтеграла $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ до інтеграла з довільними межами використано відоме співвідношення $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \alpha f(\alpha x_k + \beta)$ для обчислень кратних інтегралів з пропущеними вузлами

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\xi)dxd\xi = \alpha\gamma\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_j b_i \left\{ f(\beta+\alpha x_j,\delta+\gamma x_i) + f(\beta-\alpha x_j,\delta+\gamma x_i) + f(\beta+\alpha x_j,\delta-\gamma x_i) + \right.$$

$\left. + f(\beta-\alpha x_j,\delta-\gamma x_i)\right\}$, де $\alpha=\dfrac{b-a}{2}$, $\beta=\dfrac{b+a}{2}$, $\gamma=\dfrac{d-c}{2}$, $\delta=\dfrac{d+c}{2}$ для $n=2$ - мірного куба, де, $R(f_n)=f^{(4)}/135$. В ході обчислень на інтервалі $[-1,1]$ отримано $R(f_n)\approx 1{,}1\cdot 10^{-6}$. Розв'язуючи цю систему для ряду значень $\alpha=C\delta^2$, $C=\sum_{i=0}^{5}10^{-i}$, знаходимо шуканий розв'язок $\zeta_{\alpha_i}(x_k)_{k=1}^{m}$. Оптимізація розв'язків із знаходженням α_{opt} для модельних прикладів не проводилась і тут ще є простір для вдосконалення. Модельне поле, яке фігурує в правій частині всіх алгоритмів, отримане розв'язанням прямої задачі, тобто обчислення полям, генерованого модельним контактом типу Іванова:

$$\zeta(x_i)=\begin{cases} h_1+\sum_{i=1}^{n}\left\{a\left(1-x_i^2\right)^2+b\sin k\pi x_i\right\}, & i\in[c_0,c_3] \\ h_1 & , i\notin[c_0,c_3]\end{cases}, \qquad (1.46)$$

Значення отриманого поля, збурені 5%-ним шумом, служать вхідними даними для вирішення оберненої задачі. Під час тестування вивчено чисельну збіжність другого рівняння системи (1.32) (рис. 1.6) та поведінку їх інтегральних ядер. Останні нерівнозначні за точністю і швидкодією Працездатність алгоритмів (1.30 - 1.32) проілюстровано на модельних прикладах з параметрами: довжина профілю $l\in[c_0,c_3]\equiv[-1,1]=2$ *км*; крок $\Delta x=0.1$ *км*, перепад густини $\sigma=0.3$ *г/см*^{3}; коливання контакту $-1{,}6\le\zeta(x)\le -1{,}4$ *км*; апріорна глибина контакту $h=1{,}2$.*км*; амплітудні величини

$$a=b=1;\ n=15,\ k_d=2,\ h=1.0,\ \varphi=h_1=k=a=b=1,\ \Delta x=0{,}133,\ \Delta\zeta=0{,}066,\ \delta=10^{-5},$$

$x_i=(-1.4+i\Delta x)$. Чисельний алгоритм такий:

1°. введення вхідних даних $l,n,k_d,a,b,\varphi,h_1,k$, значень поля g_i та розрахунок додаткових параметрів чисельної схеми $m,m_g,\Delta x,\Delta\zeta$;

2°. вирішення прямої задачі – визначення теоретичного поля, генерованого модельним контактом , за формулою $u(x_i)=\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\zeta(x_i)-\dfrac{\Delta x}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\ \ln\dfrac{\zeta^2(x_i)+(\xi_j-x_i)^2}{\zeta^2(\xi_j)+(\xi_j-x_i)^2}\right)$, де γ_j – коефіцієнти квадратури Гауса, його екстраполяція за формулою

$$\tilde{u}(x_i)=\Delta x\sum_{i=1}^{2n-1}\left(u(x_{i-1})\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\ \frac{2h}{(2h)^2+(\xi_j-x_i)^2}T(\xi_j)\right),$$

$$T(\xi_j)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\gamma_j\left(\sin^{2j-1}\xi_j\ \sin(2j+1)\xi_j-\sin^{2j}\xi_j\ \cos(2j+2)\xi_j\right);$$

3°. зашумлення отриманого поля $\tilde{u}(x_i)$ псевдовипадковою похибкою з рівномірним розподілом $u_\delta(x_i)=\sum_{i=1}^{m}\{u_i+\Delta_i-\Delta_i/m\}$, $\Delta_i=\sigma\sum_{i=1}^{m}\left(2^{24}r/5^9-0.5\right)$ для використання вектора $\tilde{u}(x_i)_{i=1}^{2m+1}$ як початкового наближення оберненої задачі

$$S^+(x_i)=\sum_{i=1}^{m}u(x_i)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{g(x_s)}{2\pi},\ s=\sum_{i=1}^{m}k_d(i-1)+1,\ m=\mathrm{int}(\varphi)n+1.$$

4°. розрахунок спряженої правої частини $v(x_i)$ через розклад значень $u(x_i)$ у ряд Фур'є і

наступний синтез $S^{-}(x_i)\equiv v_i=\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{n_0}c_{ij}\,t_k\,,\;\; t_k=\Delta x\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{n_0}c_{ik}\,u_i\,,$

$$c_{ij}=\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{n_0}\left\{1+\cos\frac{2\pi i}{2m+1}+\sin\frac{2\pi i}{2m+1}\right\};$$

5°. формування моделі початкового наближення: задання апріорної інформації h,ε,δ та звуження області еквівалентності введенням обмежень $\zeta_{\min}(x_i)$ та $\zeta_{\max}(x_i)$ на шукані розв'язки

$$\sum_{ш=1}^{m_0}S^{+}(x_i)=\sum_{i=1}^{n_0}S^{-}(x_i)=\sum_{i=1}^{n_0}\zeta(x_i)\equiv h,\; n_0=\frac{m-n}{2};$$

6°. розрахунок границь інтегрування a_m, ініціалізація параметрів ітерацій *σ, iter, l, m, n, k, a, b, k*$_d$, *s* та обчислення значень інтегральних ядер $K_r(x_i,h)$ за квадратурами Гауса

$$K_p(\breve{x}_i,h)=\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i\,\frac{h}{h^2+(\Delta x\cdot i-\xi_j)^2}\,,\;\; K_s(\breve{x}_i,h)=\frac{\Delta x}{2h}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i\left(e^{\pi i\Delta x/2h}+e^{-\pi i\Delta x/2h}\right)^{-1},\;\; \xi=\sum_{j=1}^{n_k}(j-0.5)\Delta y$$

$$K_p(\breve{x}_i,h)=\frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i\sum_{k=n_0+1}^{m_0}\frac{1}{\zeta(x_k)}\frac{e^{f}-e^{-f}}{e^{f}+e^{-f}}\,,\; x_i=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\Delta x,\;\; f=\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\pi(x_i-t_j)}{2\zeta_k};$$

7°. обчислення наближень $\tilde{\zeta}(x_i)$ із відповідного ітераційного процесу:

$$S^{+}(x_k)=\sum_{k=n_0+1}^{m_0}\left\{u_k-\Delta x\sum_{j=1}^{n_0}\gamma_j K_p(\bar{x}_j,\zeta_k)\left[S^{+}(\bar{x}_j)+S^{+}(\xi_j)\right]u_j+K_p(\bar{x}_1,\zeta_k)S^{+}(x_k)\right\},$$

$$S^{-}(x_k)=\sum_{k=n_0+1}^{m_0}\left\{\bar{v}_k-\sum_{j=1}^{n_0}\gamma_j K_s(\bar{x}_j,\zeta_k)\left[S^{-}(\bar{x}_j)-S^{-}(\xi_j)\right]\zeta_j+K_s(\bar{x}_1,\zeta_k)S^{-}(x_k)\right\},$$

$$\zeta(x_i)=\sum_{i=n_0+1}^{m_0}\left\{S^{+}(x_i)+S^{-}(x_i)\right\}$$

8°. регуляризація отриманого розв'язку: обчислення параметра регуляризації α за принципом нев'язки та визначення регуляризованого розв'язку з розрахунком середньоквадратичної похибки $\sigma_i=\sqrt{\sum_{ii=n_0+1}^{m_0}\zeta^2(\bar{x}_i,h)\Big/(m_0-n_0-1)}$; при $\|\sigma-\delta\|_{L_2}\le\varepsilon_{маш}$ вертаємось на крок **7**°, інакше фіксуємо в файлі результати обчислень $S_0^{+}(x_i),\; S_0^{-}(x_i);\; \tilde{\zeta}_i,\; \alpha_i,\; \zeta_i^{\alpha_i};\; \sigma_n,\; iter$.

Тестування здійснено так: для заданих точних розв'язків $\zeta_T(\xi)$ і ядер $K_T(x,\xi)$ розраховують аналітично або чисельно праві частини $u_T(x)$, потім вносять в них випадкові похибки (нормальний розподіл), а точні ядра замінюють наближеними $K_\delta(x,\xi)$ тієї ж гладкості з точністю $\varepsilon=\sqrt{\int_{c_1}^{c_2}\left[K_\delta(x)-K(x)\right]^2dx}$. З цими даними вирішено два модельні приклади:

1. Модельне рівняння $\int_{c_0}^{c_3}K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi=u(x),\; c_1\le x\le c_2$, точний розв'язок $\zeta(\xi)\approx\begin{cases}(1-\xi^2)^2, & |\xi|\le 1\\ 0, & |\xi|\ge 1\end{cases}$, точне ядро $K(x,h)=e^{-x^2}$, при цьому $[c_0,c_3]=[-1.4,1.4]$, $n=29,\;\Delta x=0.1,\;[c_1,c_2]=[-1,1]$, порядок регуляризації – нульовий (гладкі функції контакту, правої частини, їх майже однакова ефективна ширина)

2. Все те саме, але точне ядро $K(x,h)=\sqrt{4/\pi}e^{-4x^2}$, що означає внесену похибку оператора

$\varepsilon \approx 0.12$ (тобто $\varepsilon_{\text{отн}} \approx 12.5\%$). За такої похибки складно знайти шукану функцію $\zeta(x)$.

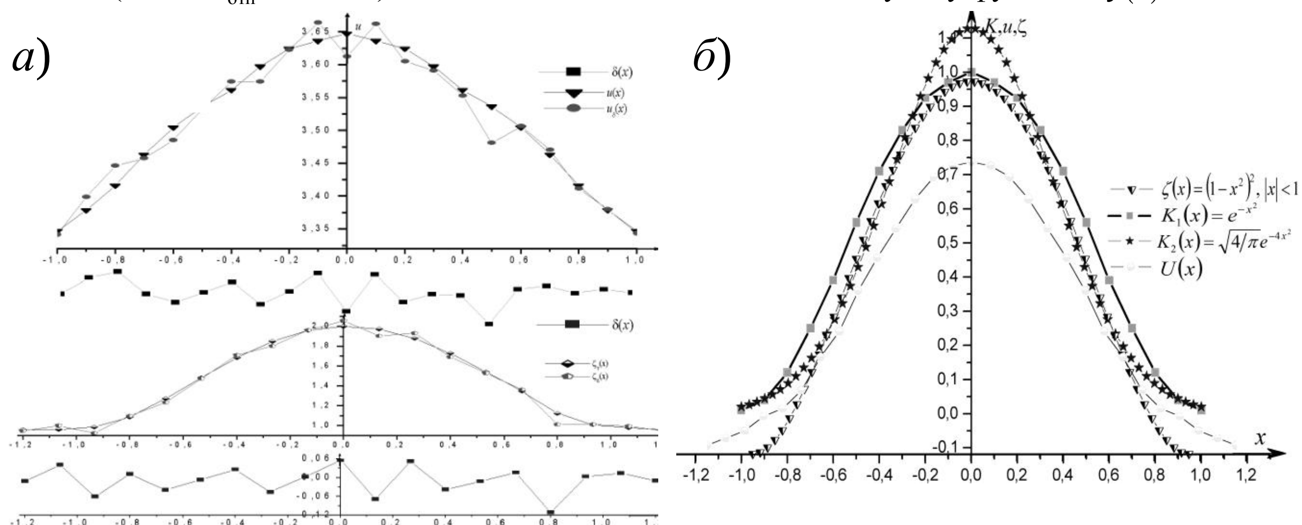


Рис. 1.6. Теоретичне поле за модельним контактом (а) та тестові приклади (б).

Ітерації закінчують по досягненні заданої середньоквадратичної нев'язки чи по виконанні заданої кількості кроків ітерації. Похибки отриманих розв'язків не перевищують заданих неточностей поля. В дисертації [21] здійснено порівняння розроблених в роботі і відомих класичних алгоритмів Чорної, Нумерова, Маловичка, яке виявило більшу ефективність алгоритмів Лаврентьєва - Андреєва, Лаврентьєва - Чорного порівняно з класичними схемами, зумовлену кращим ступенем обумовленості систем алгебричних рівнянь. Чисельні експерименти виявили перевагу алгоритмів відновлення контакту на короткому профілі над класичними способами за точністю та обсягом обчислень (рис. 1.7 -1.10). Деталі експерименту можна віднайти в дисертації.

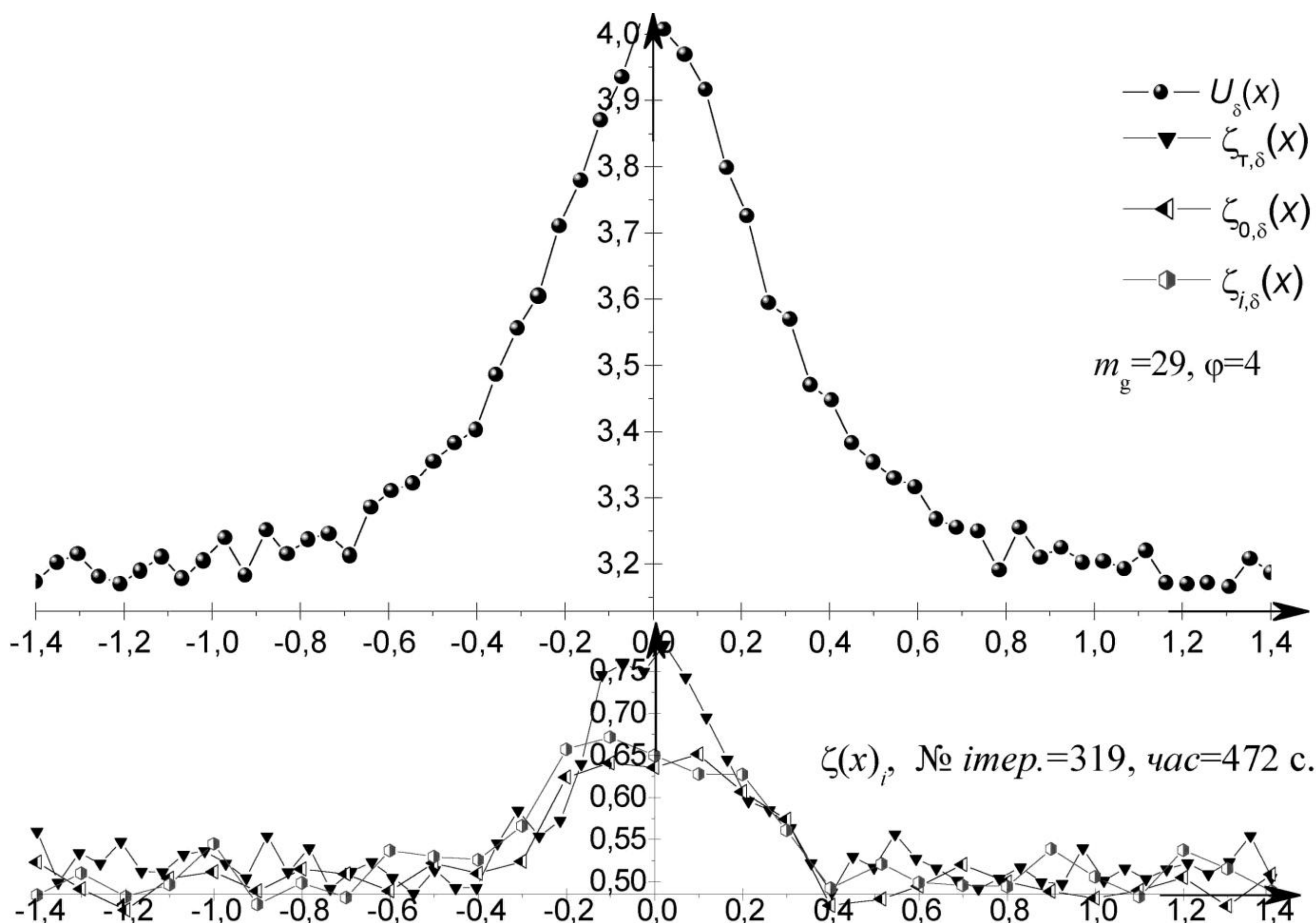


Рис. 1.7. Відновлення модельного контакту за алгоритмом (1.32).

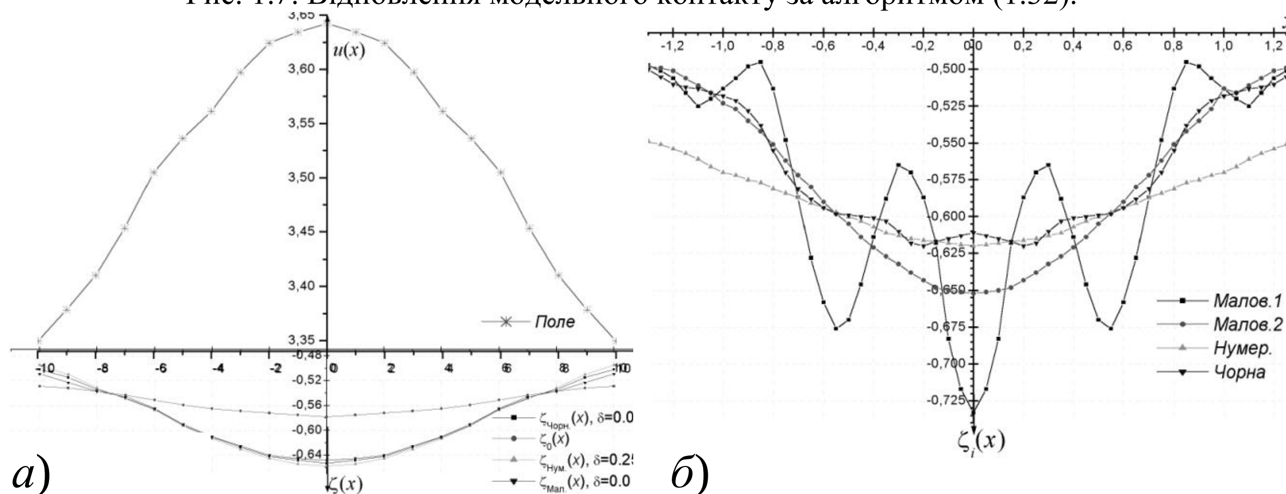


Рис. 1.8. Результати розв’язання прямої (а) і оберненої (б) задачі для алгоритмів Нумерова, Маловичка і Н. Чорної.

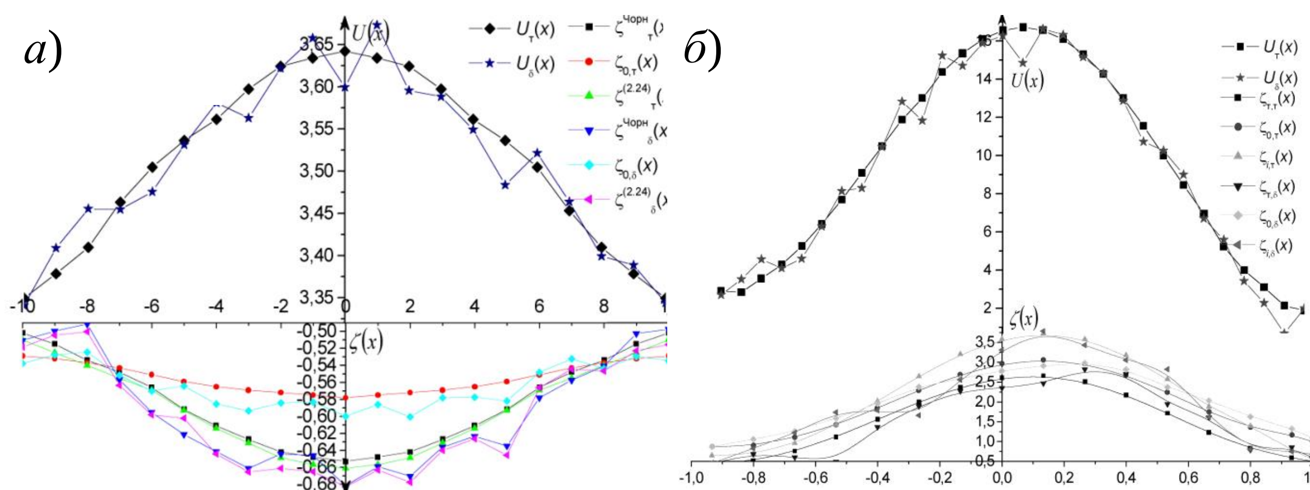


Рис. 1.9. Модель контакту (а) і результат його обчислень (б) за алгоритмом (1.30).

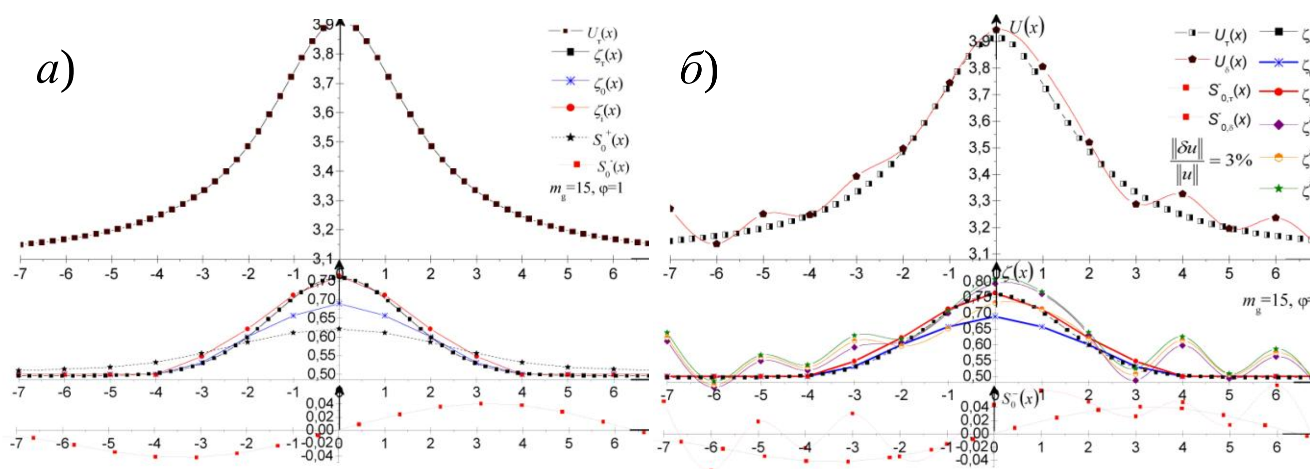


Рис. 1.10. Відновлення контакту за узагальненим алгоритмом Чорного (1.33):
а) – за точними значеннями поля; б) – за 3%-збуреними значеннями поля.

Висновки. Дослідження представляють перш за все науковий інтерес, але алгоритми можна застосувати у складі автоматизованих систем для моделювання і експрес-аналізу гра-

віметричних даних на маловивчених територіях нескладної будови. Точність обчислень контакту залежить не лише від похибок поля δ, але і від довжини інтервалу його задання; за *однакової точності* обчислень у випадку задання значень $v(x)$ на короткому інтервалі для відновлення їх за допомогою операторів зі швидко спадаючими ядрами потрібний менший обсяг інформації, ніж у випадку задання поля на нескінченних профілях. Відтак, отримано *теоретичне узагальнення* і нове вирішення оберненої задачі потенціалу для контактної границі в лінеаризованій постановці. Головні наукові і практичні досягнення такі:

1°. Описано математичну модель задачі відновлення контакту на класі Нумерова за вертикальними похідними логарифмічного потенціалу у вигляді розв'язків лінеаризованих інтегральних рівнянь Фредгольма 1 - го роду. В їх узагальнених модифікаціях усунута залежність розв'язків від апріорі невідомого параметра h — *середньої глибини* до контакту**.** Доведено існування і єдиність розв'язків на компактному класі єдиності $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Модель задачі поширюється на магнітоактивні контакти.

2°. Доведено, що відомі алгоритми, які базуються на виразах з інтегральним ядром Пуассона, не забезпечують прийнятної точності відновлення контакту за полем, заданим на коротких профілях, які властиві практиці спостережень. Для випадку задання значень поля на *істотно короткому* профілі для визначення контактної границі $\zeta(x)$ запропоновано кілька алгоритмів, що базуються на інтегральних рівняннях із швидкозбіжним ядром типу Шварца. На основі рівнянь з ядрами Пуассона і Шварца введено два різних типи задач для відновлення контакту (з параметром h та без нього). Вивчено структуру класу єдиності зазначених рівнянь. Доведено умовну коректність контактної задачі.

3°. Для розв'язання рівнянь кожного типу задач запропоновано збіжні ітераційні процеси Лаврентьєва - Андреєва (1.30) і Лаврентьєва - Чорного (1.32) та їх узагальнені аналоги (1.31) і (1.33). Практичною перевагою ітерацій (1.31), (1.33) є швидша збіжність та можливість задання значень контакту на *короткому* профілі. Збіжність усіх ітерацій обґрунтовано за новим способом, що базується на еквівалентному зображенні підінтегральних виразів в ітераційних процесах через узагальнені функції.

4°. В ході дослідження вищезгаданих ітерацій поліпшено ітераційні способи уточнення нумерівського наближення контакту, пропоновані свого часу Андреєвим, Малкіним і Сеньком, введено новий спосіб Нумерова - Маловичка і обґрунтовано стійкість уточнень. Їх можна використати для аналітичних апроксимацій поля в автоматизованих системах інтерпретації.

5°. Для чисельного вирішення задачі розроблено регуляризуючі алгоритми на базі концепції регуляризації Тихонова. Модернізовано знаходження оптимального параметра регуляризації α_0, мінімізовано похибки округлень. Створено пакет програм і перевірено на тестових задачах. Порівняння чисельних розв'язків довело перевагу алгоритму (1.32) над алгоритмом (1.30). Досягнута точність розв'язку $\varepsilon_\zeta \approx 10^{-5}$ при похибках оператора $\varepsilon_A \approx 10^{-4}$ і спостережень $\delta \approx 10^{-4}$ прийнятна для застосувань.

Однак, ця теорія ще чекає своєї практичної перевірки і не позбавлена деяких недоліків, які дають перспективу подальшого вдосконалення, а саме, на нашу думку:

1. поширення математичного апарату на тлумачення даних в площинному варіанті;
2. залежність поведінки контакту (точності рахунку) від різних густин і глибин до контакту – вивчення впливу низької контрастності вхідних даних на роботу методу та інших впливів: великі шуми, багатошаровість, еквівалентність, оцінка достовірності, статистична обробка;
3. розробка діалогово-графічного інтерфейсу для промислового застосування програм та поширення задачі на просторовий випадок в рамках класу Нумерова єдиності розв'язків і заданих обмежень на функції поля й контакту (в дійсній і комплексній областях);
4. вивчення практичної залежності мінімальної довжини профілю від глибин контакту – нині це лише змодельовано як вплив похибок на поведінку розв'язку в оцінці загаль-

ної похибки;

5. вивчення залежності розв'язків задачі від складної форми контактної границі та максимальної глибинності методу за різного рівня вхідних шумів на реальних прикладах поля;
6. перевірка швидкісних характеристик і схеми екстраполяції на розроблених алгоритмах, чисельне порівняння прискорених і не прискорених алгоритмів розв'язання оберненої задачі для контактної поверхні та тлумачення результатів;
7. вивчення можливості відновлення кількох контактних поверхонь одночасно;
8. відображення контакту в інших полях, перспективи комплексування та застосування на складніших моделях середовища і полях більшої розмірності, чисельні проблеми методу;
9. вивчення можливості застосування розробленого методу інтерпретації даних структурної гравіметрії для визначення положення покришок нафтогазових колекторів у комплексі з даними сейсморозвідки нафтогазоносної території, та для супроводу останнього методу при дорозвідці і моніторингу діючих родовищ вуглеводнів;
10. вивчення можливостей методу відновлення контактів для завдань інженерної геології та моніторингу рівня техногенного навантаження в умовах міських агломерацій.

2. ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ГРАНИЦІ ОБМЕЖЕНОГО ЗІРКОВОГО ОДНОРІДНОГО ТІЛА, БЛИЗЬКОГО ДО КРУГА

Вступ [89]. Задача визначення форми тіла за його потенціалом поставлена давно в зв'язку з дослідженнями фігури Землі, хоча математично вона була чітко сформульована і наближено розв'язана лише на початку 30-х років минулого сторіччя Л. Ліхтенштейном [38] в припущенні, що потенціал шуканого тіла близький у сенсі деякої функціональної метрики до зовнішнього потенціалу заданого тіла. Тому згодом вона іменувалася задачею для тіла, близького до заданого, а її розв'язок — як локальний чи "в малому". Незабаром, наприкінці 30-х років, П. С. Новіков [42] довів теорему єдиності глобального розв'язку задачі, а Л. М. Сретенський [53] — локальну теорему існування в припущенні, що заданим тілом є однорідна куля. І тільки в 1943 р. А. М. Тихонов [62] встановив на підставі теоретико-множинних концепцій умови стійкого розв'язку задачі як безпосередній наслідок теореми єдиності. Цими роботами був відкритий новий клас так званих обернених задач потенціалу, що визначив найбільш перспективний напрямок теорії обчислень. Правда, поки це було усвідомлено, пройшло довгих 20 років. Саме тоді М. М. Лаврент'єв [34] сформулював нові умови коректності за А. М. Тихоновим задач математичної фізики з центральною вимогою однозначного розв'язування задачі на певній множині функцій. Це відкриття докорінно змінило існуючі уявлення про те, що будь-яка задача, яка не задовільняє вимогам коректності за Ж. Адамаром, не відповідає ніякій реальній фізичній постановці. Дослідженнями в різних галузях знань за останні 30-40 років встановлено, що множина процесів і явищ природи, математичний опис яких дається в рамках коректності за А. М. Тихоновим, по потужності, якщо не більша, то, принаймні, не менша в порівнянні з множиною процесів і явищ, що описуються в рамках класичної коректності за Ж. Адамаром. Суть справи тут зовсім не в адекватності математичного опису того чи того реального процесу чи явища, а в способі опису їхніх властивостей: або за безпосередньо вимірюваними їхніми характеристиками, або за опосередкованими їхніми проявами. Опис за опосередкованими характеристиками, як правило, приводить до некоректних задач. У свою чергу некоректні задачі найчастіше зводяться до інтегральних рівнянь із цілком неперервними (компактними) операторами.

Для деяких класів лінійних і нелінійних компактних операторів і певних множин у відповідних функціональних просторах М. М. Лаврент'єву вдалося побудувати функції коректності та за їх допомогою отримати ефективні розв'язки сформульованих задач. Наступний крок у розвитку теорії розв'язування некоректних задач зробили В. К. Іванов [25] і А. М. Тихонов [63]. В. К. Іванов, прагнучи усунути ускладнення, пов'язані з відсутністю розв'язку

(лінійного) інтегрального рівняння першого роду з неточно заданою правою частиною, запропонував шукати його квазірозв’язок, тобто елемент, який мінімізує функціонал нев'язки рівняння на опуклому компакті, що містить точний розв’язок. А А. М. Тихонов для обчислення наближеного розв’язку некоректної задачі побудував регуляризуючий оператор за допомогою мінімізації певного функціонала, який задається на множині можливих розв’язків. Роботи М. М. Лаврент’єва [34, 36], В. К. Іванова [24, 25] і А. М. Тихонова [63, 65] дали могутній поштовх бурхливому розвитку теорії і методів розв’язування некоректних задач, а також їх застосуванню у різних галузях знань, у тому числі й у геофізиці. Чільне місце в загальному потоці публікацій зайняли роботи М. А. Алексідзе [1-5], А. В. Бакушинського [10], П. І. Балка [11], В. Б. Гласко [13], І. І. Данилюка та М. І. Михалюка [17], В. М. Ісакова [27, 28], Д. В. Капанадзе [30], А. С. Леонова [66], В. П. Маслова [41], С. М. Оганесяна [45, 46], А. І. Прилепка [47, 49], В. Г. Романова [50], В. І. Старостенка [55], В. Н. Страхова [58, 61], В. Г. Чередніченка [73-75], Н. Н. Чорної [76, 77], А. В. Чорного [92-96], А. В. Цирульського [71, 72] та ін. І проте всі ці надзвичайно важливі досягнення знаменують собою тільки початок великого наукового пошуку, котрий повинен завершитися створенням загальної теорії. Дотепер залишаються невирішеними питання коректного розв'язання за А. М. Тихоновим некоректних задач. Якщо М. М. Лаврент’єв [34] пропонує не торкатися зовсім проблеми існування (глобальних) розв’язків обернених задач потенціалу, а вважати їх заздалегідь відомими для певного класу даних, то В. П. Маслов [41] орієнтує на те, що одержання чисельного розв’язку некоректної задачі з заданою правою частиною методом регуляризації само по собі засвідчувало б існування розв’язку, а розбіжність регуляризованого процесу означала б не існування цього розв’язку. Іншими словами, за В. П. Масловим існування чи відсутність глобального розв’язку некоректної задачі пов'язується з реалізацією певного регулярного алгоритму. Однак, останній критерій інколи викликає сумніви, тому що реалізація методу регуляризації не завжди буває адекватною. Так, у геофізичних обчисленнях метод регуляризації використовувався зазвичай формально, без врахування особливостей операторів рівнянь і характеристик їхніх правих частин. Він застосовувався в найпростішому варіанті, яким його пропагували класики, у вигляді побудови мінімізуючої послідовності функціоналів нев'язки з додатковою вимогою мінімуму норми розв’язку і не завжди приводив до позитивного результату. Тому в загальній теорії розв’язування некоректних задач питання побудови адекватних регуляризаторів стають одними з першорядних. Як і раніше залишаються значні труднощі в питаннях єдиності та існування локальних розв’язків обернених задач потенціалу при відновленні різних класів тіл навіть за постійної їхньої щільності в зв'язку з винятковою складністю відповідних інтегро-диференціальних рівнянь, до яких редукуються ці задачі. Деякі з перерахованих проблем визначили коло тих питань, у рамках яких нижче розглядається обернена задача логарифмічного потенціалу для обмеженого тіла, близького до круга, за відомої постійної щільності без істотних обмежень на розмірність арифметичних просторів, що апроксимують вихідні дані і розв’язки.

2.1. Математична модель задачі. Нехай на нескінченній прямій $\mathbb{R}^{(1)} = (-\infty, +\infty)$, уздовж якої направимо вісь $0x_1$ декартової прямокутної системи координат $0x_1x_2$, заданий логарифмічний потенціал притягання

$$U(x; \mathcal{D}, \sigma) = 2f\sigma \int_{\mathcal{D}} \ln \frac{1}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^{(2)},$$

$$|x-y|^2 = \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2, \qquad dy = dy_1 dy_2, \quad x = (x_1, x_2),$$

тіла $(\mathcal{D}, \sigma)$ постійної щільності σ, де f — гравітаційна стала. За відомими значеннями потенціалу і заданої щільності потрібно визначити границю $\partial\mathcal{D}$ області $\mathcal{D}$, що притягає, при додатковій умові, коли задані на $\mathbb{R}^{(1)}$ значення потенціалу $U(x; \mathcal{D}, \sigma)$ мало відрізняються (у сенсі визначеної метрики) від значень потенціалу $U_k(x; \mathcal{D}_0, \sigma)$ круга $\mathcal{D}_0(\xi, \rho)$ радіуса ρ з

центром у точці $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, заповненого масою тієї ж постійної щільності σ, з якою розподілена маса по області 👎 . Вісь $0x_2$ направимо в бік збурюючого тіла так, щоб вона проходила через центр круга, тобто через точку $\xi = (0, h)$, $\rho < h$. Тоді при малому відхиленні зовнішніх потенціалів $U(x;$ 👎 $, \sigma)$ і $U_k(x;$ 👎$_0, \sigma)$ областей 👎 і 👎$_0$, шукане тіло 👎 буде мало відрізнятися як за своїми розмірами, так і за своїм розташуванням від апроксимуючого круга 👎$_0$. Тому область 👎 буде зірчастою відносно центру круга 👎$_0$.

Наведену задачу зручно розглядати в полярній системі координат з полюсом у центрі $\xi = (0, h)$ круга 👎$_0$ і з відліком кутів проти часової стрілки від полярного радіуса, що збігається з віссю $0x_2$. Позначаючи через $\rho(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, однозначну функцію, що описує контур зіркового тіла 👎 , а через $\zeta(\alpha) = \rho(\alpha) - \rho$ — відхилення контуру тіла 👎 від круга 👎$_0$, одержимо вираз для потенціалу $U(x;$ 👎 $, \sigma)$ з врахуванням того, що область 👎 близька до круга 👎$_0$

$$u(x) = \int_{👎} \ln \frac{1}{|x-y|} dy = u_k(\varphi, r) + \delta u(\varphi, r)\,; \tag{2.1}$$

$$u(x) = U(x;\ 👎,\ \sigma) / 2f\sigma, \qquad \delta u(\varphi, r) = \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, \zeta(\alpha), \rho; \varphi, r) d\alpha,$$

$$u_k(\varphi, r) = \int_0^{2\pi} 2\alpha \int_0^{\rho} \ln \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2sr\cos(\alpha-\varphi) + r^2}} s ds = \pi\rho^2 \ln\frac{1}{r},$$

$$\Phi(\alpha, \zeta, \rho; \varphi, r) = \frac{r\zeta(\alpha)}{2}\cos\psi + \frac{2\rho\zeta(\alpha) + \zeta^2(\alpha)}{4} - \frac{2\rho\zeta(\alpha) + \zeta^2(\alpha)}{4}\ln R^2(\psi, \rho, r) -$$

$$-\frac{[\rho + \zeta(\alpha)]^2}{4}\ln\left[1 + 2\frac{\zeta(\alpha)(\rho - r\cos\psi)}{R^2(\psi,\rho,r)} + \frac{\zeta^2(\alpha)}{R^2(\psi,\rho,r)}\right] +$$

$$+\frac{r^2}{4}\cos 2\psi \ln\left[1 + 2\frac{\zeta(\alpha)(\rho - r\cos\psi)}{R^2(\psi,\rho,r)} + \frac{\zeta^2(\alpha)}{R^2(\psi,\rho,r)}\right] -$$

$$-\frac{r^2}{2}\sin 2\psi\, arctg \frac{r\zeta(\alpha)\sin\psi}{R^2(\psi,\rho,r)\left[1 + \frac{\zeta(\alpha)(\rho - r\cos\psi)}{R^2(\psi,\rho,r)}\right]},$$

В наведеній формулі (2.1) доданок $u_k(\varphi, r)$ є потенціалом круга 👎$_0$, а $\delta u(\varphi, r)$ — потенціалом "надлишкового" тіла Δ👎 = 👎 \ 👎$_0$ стосовно цього круга. Справедлива

Теорема 2.1. *Якщо область 👎 , що розглядається, мало відхиляється від круга 👎$_0$ в сенсі виконання умови*

$$\max_{\alpha} |\zeta(\alpha)| < \min_{\alpha} R(\alpha - \varphi, \rho, r),$$

де $\quad \zeta(\alpha) = \rho(\alpha) - \rho, \qquad \min\limits_{\alpha} R(\alpha-\varphi, \rho, r) = \min\limits_{\alpha}\sqrt{\rho^2 - 2\rho r\cos(\alpha-\varphi) + r^2} = h(1-\nu),$

$\nu = \rho h^{-1} < 1$, *то підінтегральна функція*

$$\Phi(\alpha, \zeta, \rho; \varphi, r) = \int_{\rho}^{\rho(\alpha)} \ln\frac{1}{\sqrt{s^2 - 2sr\cos(\alpha-\varphi) + r^2}} s ds,$$

що визначає варіацію потенціалу

$$\delta u(x) = \int_{👎 \setminus 👎_0} \ln\frac{1}{|x-y|} dy = \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, \zeta(\alpha), \rho; \varphi, r) d\alpha,$$

$$x_1 = r\sin\varphi, \quad x_2 - h = r\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

розгортається в абсолютно збіжний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta^k(\alpha)}{k!}\frac{1}{\rho^{k-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{k-1}\frac{\partial^{k-2}}{\partial\rho^{k-2}}\ln\frac{1}{R(\alpha-\varphi,\,\rho,\,r)}\right)=\Phi(\alpha,\,\zeta,\,\rho;\,\varphi,\,r)\,.$$

Доведення. Подамо підінтегральну функцію $\Phi(\alpha,\,\zeta,\,\rho;\,\varphi\,,\,r)$, що обумовлює варіацію $\delta u(\varphi,r)$ в зображенні (2.1), в нових змінних $(\beta,\,\tau)$, котрі зі старими змінними $(\psi,\,\nu)$, $\nu=\rho(\alpha)\,h^{-1}$, $|\,\nu\,|<1$, зв'язані наступними співвідношеннями

$$\tau=\frac{\zeta(\alpha)}{R(\psi,\,\rho,\,r)}\,,\qquad |\,\tau\,|<1\,;\qquad \cos\beta=\frac{\rho-r\cos\psi}{R(\psi,\,\rho,\,r)}=\frac{\partial R(\psi,\,\rho,\,r)}{\partial\rho},\qquad 0\le\beta\le 2\pi\,.$$

У результаті одержимо

$$\Phi(\beta,\,\tau;\,\rho,\,R)=\rho\,\tau\,R-\frac{\tau\,R^2}{2}\cos\beta+\frac{\tau^2\,R^2}{4}-\left(\rho\,\tau\,R+\frac{\tau^2\,R^2}{2}\right)\ln R-\left(\rho\,\tau\,R+\rho\,R\cos\beta+\frac{\tau^2\,R^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{R^2}{2}\cos 2\beta\right)\ln(1+2\tau\cos\beta+\tau^2)^{1/2}-\left(\rho\,R\sin\,\beta-\frac{R^2}{2}\sin\,2\beta\right)arctg\,\frac{\tau\sin\,\beta}{1+\tau\cos\beta}\,,$$

де $R=R(\psi,\,\rho,\,r)$. А так як [105]

$$\ln(1+2\tau\cos\beta+\tau^2)^{1/2}=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\tau^k}{k}\cos k\beta,\qquad |\,\tau\,|<1,$$

$$arctg\,\frac{\tau\sin\,\beta}{1+\tau\cos\beta}=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\tau^k}{k}\sin\,k\beta,\qquad |\,\tau\,|<1, \tag{2.1 a}$$

$$\cos k\beta=(-1)^{k-1}\,\frac{R^k(\psi,\,\rho,\,r)}{(k-1)!}\,\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\ln R(\psi,\,\rho,\,r),$$

те попереднє зображення $\Phi(\beta,\tau;\,\rho,\,R)$ можна переписати у вигляді

$$\Phi(\alpha,\,\zeta,\,\rho;\,\varphi,\,r)=-\rho\zeta\ln R-\frac{\zeta^2}{2}\left(\ln R+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\ln R\right)-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\zeta^k}{k!}\,\frac{1}{\rho^{k-2}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{k-1}\,\frac{\partial^{k-2}}{\partial\rho^{k-2}}\ln R\right),$$

яке збігається з тим, яке потрібно було довести, якщо за згодою прийняти для $n=2$ вираз

$$\frac{\zeta^2}{2}\left(\ln R+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\ln R\right)=\frac{\zeta^2}{2!}\,\frac{1}{\rho^{2-2}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2-1}\,\frac{\partial^{2-2}}{\partial\rho^{2-2}}\ln R\right).$$

На підставі теореми 2.1 нелінійне стосовно функції $\rho=\rho(\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$, інтегральне рівняння (2.1) перетворюється в наступне нелінійне інтегральне рівняння для функції $\zeta=\zeta(\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$,

$$\int_0^{2\pi}k(\alpha,\,\varphi;\,\rho,\,r)\zeta(\alpha)d\alpha=v(\varphi,\,\zeta;\,\rho,\,r),$$

де

$$k(\alpha,\,\varphi;\,\rho,\,r)=k(\varphi,\,\alpha;\,\rho,\,r)=\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos(\alpha-\varphi)+r^2}},$$

$$v(\varphi,\,\zeta;\,\rho,\,r)=\frac{1}{\rho}\left(u(\varphi,\,r)-u_k(\varphi,\,r)-\int_0^{2\pi}f(\alpha-\varphi,\,\zeta;\,\rho,\,r)d\alpha\right),$$

$$f(\psi,\,\zeta;\,\rho,\,r)=\frac{1}{2}\left\{\zeta(\alpha)(\rho+r\cos\psi)+\zeta^2(\alpha)\left(\frac{1}{2}-\ln R(\psi,\,\rho,\,r)\right)+\right.$$

$$+\left(r^2\cos 2\psi-\frac{(\rho+\zeta(\alpha))^2}{2}\right)\ln\left(1+\frac{2\zeta(\alpha)(\rho-r\cos\psi)+\zeta^2(\alpha)}{R^2(\psi,\,\rho,\,r)}\right)- \tag{2.2}$$

$$-r^2 \sin 2\psi \, arctg \frac{r\zeta(\alpha)\sin\psi}{R^2(\psi,\ \rho, r) + \zeta(\alpha)(\rho - r\cos\psi)} \Bigg\},$$

причому функція $f(\psi, \zeta;\ \rho, r)$ відновлюється за функцією $\Phi(\alpha, \zeta;\ \rho; \varphi, r)$ з вихідного виразу (2.1).

Але якщо замість відхилення $\zeta(\alpha)$ контуру тіла 👎 від кола ∂👎$_0$ підставити в рівняння (2.1) наближення $\zeta_n = \zeta_n(\alpha)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ цього відхилення, то наведене перетворення рівняння (2.1) можна розглядати як *лінійне* інтегральне рівняння першого роду для визначення наближень. Таким чином, *нелінійне* рівняння (2.2) для функції $\zeta(\alpha)$ перетворюється на *лінійне* рівняння (2.3) для функції $\zeta_n = \zeta_n(\alpha)$, якщо покласти

$$\int_0^{2\pi} k(\alpha, \varphi;\ \rho, r)\zeta_n(\alpha)d\alpha = v(\varphi,\ \zeta_{n-1};\ \rho, r),$$

$$n = 1, 2, \cdots, \infty; \quad \zeta_0(\alpha) = 0; \tag{2.3}$$

$$v(\varphi, \zeta_0;\ \rho, r) = \frac{1}{\rho} u(\varphi, r) + \pi\rho \ln r,$$

$$v_{n-1}(\varphi) = v(\varphi, \zeta_{n-1};\ \rho, r).$$

Беручи до уваги все сказане, уточнимо постановку задачі визначення контуру однорідного фінітного джерела за формою, близького до круга. Потрібно знайти однозначну функцію $\zeta(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, що характеризує відхилення границі однорідного фінітного джерела (👎, σ) від кола ∂👎$_0$: $x_1^2 + (x_2 - h)^2 = \rho^2$ і визначає контур ∂👎 : $\rho(\alpha) = \rho + \zeta(\alpha)$, за значеннями логарифмічного потенціалу області 👎 на нескінченній прямій поза областю за умови, що потенціал мало відрізняється (у визначеному сенсі) від потенціалу круга за відомої щільності σ розподілу по області 👎 гравітуючих мас. У даній постановці відшукання функції $\zeta(\alpha)$ здійснюється у вигляді границі послідовності $\{\zeta_n(\alpha)\}$, що генерується процесом наближень (2.3). Надалі співвідношення для відшукання наближень $\zeta_n(\alpha)$ будемо коротко називати *інтегральним рівнянням для визначення контуру тіла,* близького до круга.

2.2. Властивості оператора прямої відповідності. Оператором A: ✠ $\to$ ✡ прямої відповідності простору розв'язків ✠ у простір даних ✡ будемо називати інтегральний оператор $A\zeta = v$, заданий рівністю

$$\int_0^{2\pi} k(\alpha,\ \varphi)\zeta(\alpha)d\alpha, = v(\varphi), \ \ \zeta \in ✠, \ \ v \in ✡, \tag{2.4}$$

де для стислості позначено $k(\alpha, \varphi) = k(\alpha, \varphi;\ \rho, r)$. З очевидної його лінійності й елементарних обчислень легко встановлюється, що оператор A є *обмеженим, неперервним і компактним* оператором із $C(0, 2\pi)$ у $C(0, 2\pi)$, із $C(0, 2\pi)$ у ☹$^{(k)}(0, 2\pi)$, із ☹$^{(k)}(0, 2\pi)$ у ☹$^{(k)}(0, 2\pi)$, $k = 1, 2$. [105]

Функція $k(\alpha, \varphi)$ — ядро оператора (2.4) — за природних обмежень на параметри ρ, r і функцію $\rho(\alpha) < r$, зв'язаних з розмірами шуканого тіла, по сукупності «кутових» змінних *неперервна* (при фіксованих ρ і r) в основному квадраті $0 \le \alpha$, $\varphi \le 2\pi$ і *симетрична* відносно цих змінних у тому сенсі, що $k(\alpha, \varphi) = k(\varphi, \alpha)$.

Тому спряжений оператор A^*, що задається рівністю

$$\int_0^{2\pi} k(\alpha, \varphi)\, v(\varphi)\, d\varphi = w(\alpha),$$

збігається в гільбертовому просторі за своєю дією з оператором A, тобто $A^* = A$ і, отже, оператор A у ☹$^{2)}(0, 2\pi)$ буде *самоспряженим.* А це в свою чергу означає, що вся сукуп-

ність $\{\lambda_k\}$ власних значень λ_k самоспряженого (компактного) оператора A — власна частина його спектру $\sigma(A)$ — складається з *дійсних* чисел, до того ж множина $\{\lambda_k\}$ власних чисел і відповідна їй множина $\{x_k\}$ власних функцій x_k, $Ax_k = \lambda_k x_k$, *не більше ніж злічена в* ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$. Для відшукання власних функцій і власних значень самоспряженого компактного оператора задачі (2.3) злегка перетворюємо його ядро [105] та отримаємо наступний розклад ядра

$$k(\alpha, \varphi, \nu) = -\ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{k} (\cos k\alpha \cos k\varphi + \sin k\alpha \sin k\varphi)$$

в абсолютно збіжний ряд за умови $\nu = \rho r^{-1} < 1$. Звідси випливає, що послідовності

$$-2\pi \ln r, \quad \pi \frac{\nu}{1}, \quad \pi \frac{\nu}{1}, \quad \ldots, \quad \pi \frac{\nu^n}{n}, \quad \pi \frac{\nu^n}{n}, \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\alpha, \ldots .$$

утворюють повну систему власних чисел і відповідних їм власних функцій неперервного симетричного ядра $k(\alpha, \varphi, \nu)$, $0 \le \alpha$, $\varphi \le 2\pi$, $\nu < 1$, самоспряженого компактного оператора A рівняння (2.4).

А це в свою чергу означає, що спектр $\sigma(A)$ оператора A *дискретний* і цілком визначається зліченним числом значень

$$\sigma(A) = \{-2\pi \ln r, 0, \pi \frac{\nu^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Далі зауважимо, що області визначення операторів A і A^* суть 🖓$(A) =$ ☠$(A) \oplus$ ✞(A^*) і 🖓$(A^*) =$ ☠$(A^*) \oplus$ ✞(A), де ✞(A), ✞(A^*) — області значень цих операторів, а ☠$(A) = \{\zeta: A(\zeta) = 0, \zeta \in$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)\}$ та ☠$(A^*) = \{\zeta: A^*(\zeta) = 0, \zeta \in$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)\}$ — їх нуль-множини. Причому в гільбертовому просторі ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$: ☠$(A) =$ ☠(A^*), ✞$(A) =$ ✞(A^*). Що ж стосується лінійного стосовно наближення $\zeta_n(\alpha)$ інтегрального рівняння задачі (2.3), то воно є рівнянням Фредгольма першого роду.

З наведеного випливає, що самоспряжений компактний оператор A задачі (2.3) встановлює взаємно однозначну відповідність тільки між підпросторами ✞(A^*) і ✞(A) простору ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$. Тому оператор A має обернений тільки на ✞(A). У зв'язку з цим необхідно прояснити два теоретико-множинних аспекти. Перше, що необхідно тримати в полі зору при розгляді розщеплень для 🖓(A) й 🖓(A^*) у гільбертовому просторі, — це відсутність ефективних критеріїв приналежності правої частини рівняння задачі області значень його оператора. Справді, якщо $z \in$ ☠(A^*), то для всіх $\zeta \in$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ будемо мати

$$0 = (A^* z, \zeta) = (z, A\zeta) = (z, \nu).$$

Звідси видно, що нуль-множина ☠(A^*) ортогональна області значень ✞(A) оператора A задачі (2.3). У зв'язку з цим не можна вказати ефективний критерій приналежності функції $\nu(\alpha)$ з ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ — правої частини рівняння $A\zeta = \nu$ — до множини ✞(A), тому що в даному випадку він має вигляд нескінченного числа співвідношень (типу скалярного добутку). Залишається єдина можливість «розпізнавання» елементів $\nu(\alpha)$ множини ✞(A) з ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ за допомогою різних процедур «згладжування», що зводяться власне до побудови середніх функцій за Стєкловим. Друге, що заслуговує на увагу в зв'язку в розщепленнями 🖓(A) і 🖓(A^*), так це те, що для розпізнавання області визначення ✞(A^*) нормальних розв’язків рівняння задачі (2.3), необхідно ввести додаткові критерії, тісно зв'язані з внутрішньою його структурою. Дійсно, оскільки для будь-якого $z \in$ ☠(A) й усіх $\nu \in$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$

має місце рівність

$$0=(Az,v)=(z,\,A^{*}v),$$

то нуль-множина ☠(A) ортогональна області значень ✞(A^{*}) спряженого оператора A^{*} задачі (2.3). А так як ортонормована система власних функцій оператора $A\,(=A^{*})$ виявляється повною не тільки в підпросторі ✞(A^{*}), але і у всьому просторі ☹$^{(2)}(0,\,2\pi)$, то, як і в попередньому випадку, за ознакою ортогональності підпросторів ☠(A) і ✞(A^{*}) не можливо виділити однозначно елементи структури ✞(A^{*}). Для розпізнавання підпросторів у розщепленні доводиться залучати додаткові характеристичні ознаки. Так за відмітні особливості множини ✞(A^{*}) можна обрати *рівномірну в середньому обмеженість* його підмножин і їх *одностайну в середньому безперервність* (чи еквівалентні їм критерії). Для матеріалізації цих ознак множини ✞(A^{*}) визначимо для довільного елемента $v\in$ ☹$^{(2)}(0,\,2\pi)$ й відповідного йому елемента $\zeta(\alpha)\in$ ✞(A^{*}) за досить малого приросту $|\Delta\alpha|<\varepsilon$ аргументу α різницю

$$\zeta(\alpha+\Delta\alpha)-\zeta(\alpha)=\int_{0}^{2\pi}[k(\alpha+\Delta\alpha,\,\varphi;\,\nu)-k(\alpha,\,\varphi;\,\nu)]v(\varphi)d\varphi=$$

$$=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\nu^{n}(-\alpha_{n}\sin n\alpha+\beta_{n}\cos n\alpha)\Delta\alpha+o(|\Delta\alpha|^{2})=\pi\Delta\alpha\zeta'(\alpha)+o(|\Delta\alpha|^{2}),\quad(2.5)$$

де α_{n}, β_{n} — коефіцієнти Фур'є функції $v(\varphi)$. Переконаємося, перш за все, що $\zeta'(\alpha)\in$ ☹$^{(2)}(0,\,2\pi)$. Безпосередні обчислення приводять до рівності

$$\|\zeta'(\alpha)\|^{2}=\pi^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\nu^{2n}(\alpha_{n}^{2}+\beta_{n}^{2}).$$

А оскільки за нерівністю Коші-Буняковського

$$|\alpha_{n}|\le\frac{\|v\|}{\sqrt{\pi}},\qquad\qquad |\beta_{n}|\le\frac{\|v\|}{\sqrt{\pi}},$$

то

$$\|\zeta'\|\le\pi\sqrt{\frac{2h^{2}}{h^{2}-\rho^{2}}}\|v\|$$

і, отже, $\zeta'(\alpha)\in$ ☹$^{(2)}(0,\,2\pi)$.

На підставі отриманого результату і безпосередньо з подання (2.5) видно, що ознаку *одностайної неперервності* множини функцій $\zeta\in$ ✞(A^{*}) можна замінити еквівалентною їй ознакою *рівномірної обмеженості перших похідних* функцій цієї множини. Що ж стосується ознаки *рівномірної обмеженості*, то для функцій множини ✞(A^{*}) вона виглядає, як неважко переконатися, таким чином

$$\|\zeta\|\le\pi\|v\|\sqrt{(2\ln h)^{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu^{2n}}{n^{2}}}\le\pi\|v\|\sqrt{\frac{2h^{2}}{h^{2}-\rho^{2}}+(2\ln h)^{2}}.$$

У зв'язку з цим множину ✞$^{(1)}(A^{*})$, яку згодом будемо називати *областю визначення нормальних розв'язків* задачі (2.3), можна описати у вигляді

✞$^{(1)}(A^{*})=\{\zeta(\alpha)\colon\zeta^{(k)}\in$ ☹$^{(2)}(0,2\pi);\ \zeta^{(k)}(\alpha+2\pi)=\zeta^{(k)}(\alpha);\quad\left\|\zeta^{(k)}\right\|\le c^{(k)},\ k=1,2\}$, де

$$\zeta^{(0)}(\alpha)\equiv\zeta(\alpha),\ \zeta^{(1)}=\frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha},\quad c^{(0)}=\pi\sqrt{2c+(2\ln h)^{2}}\,\|v\|;\ c^{(1)}=\pi\sqrt{2c}\|v\|;\quad c=h^{2}/(h^{2}-\rho^{2}).$$

2.3. Проблеми існування і стійкості розв'язків [89]. Ми вже переконалися, що оператором A прямої дії між підпросторами ✞(A^{*}) і ✞(A) гільбертового простору ☹$^{(2)}(0,\,2\pi)$ встановлюється взаємно однозначна відповідність, за якої для кожного елемента $\zeta\in$ ✞(A^{*})

в ✞(A) знайдеться єдиний елемент v, для якого виконується рівність $A\zeta = v$. Тому повинна *існувати* взаємно однозначна відповідність елементів ✞(A) елементам ✞(A^*), тобто повинне існувати обернене відображення A^{-1}: ✞$(A)\to$✞(A^*), *неперервне* на парі $\{$✞(A), ✞$(A^*)\}$ підпросторів і, взагалі кажучи, *розривне* (можливо і необмежене) на усьому ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$. До того ж область значень ✞(A^{-1}) оберненого відображення повинна бути *замкнутою* (по відповідній метриці, що *не збігається* з метрикою вихідного простору) множиною першої категорії, оскільки ця множина породжується в результаті *неперервного* відображення множини першої категорії ✞(A) за допомогою обмеженого на цій множині оператора A^{-1}, тобто повинна збігатися з ✞(A^*). Одночасно, при побудові оберненого відображення щоразу виникають певні труднощі, оскільки в рамках гільбертового простору, природним чином зв'язаного з задачею, що розглядається, *відсутні ефективні критерії* приналежності елементів підпросторам ✞(A) і ✞(A^*). Характеризацію підпросторів ✞(A) і ✞(A^*) доводиться здійснювати на підставі додаткової інформації про вихідні дані і розв'язок задачі, що забезпечує умови однозначного розв'язання відповідних рівнянь. Тому питання про існування розв'язку оберненої задачі потенціалу типу (2.1) доцільно вивчати не на всьому вихідному гільбертовому просторі, а на більш тонкій його підструктурі. На підставі цього цікаво відзначити ще одну точку зору на підпростір ✞(A^*) як на множину можливих розв'язків задачі. Розглянемо підпростір

$$✞^{(m)}(A^*) = \left\{ \zeta(\alpha) : \zeta^{(k)} \in ☹^{(2)}(0, 2\pi);\ \|\zeta\|^{(m)} = \left(\sum_{k=0}^{m} \left\|\zeta^{(k)}\right\|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

функцій з ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$, що мають (узагальнені) похідні аж до m-го порядку включно, кожна з яких належить до ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$. Очевидно, що при $k < m$ виконується нерівність $\|\zeta\|^{(k)} \le \|\zeta\|^{(m)}$ і тому

$$✞^{(1)}(A^*) \supseteq ✞^{(2)}(A^*) \supseteq \ldots \supseteq ✞^{(k)}(A^*) \supseteq \ldots \supseteq ✞(A^*),$$

тобто

$$✞(A^*) = \bigcap_{k=1}^{\infty} ✞^{(k)}(A^*).$$

Отже, підпростір ✞(A^*) (також як і підпростір ✞(A)) є *зліченно-нормованим.* Виходить, що зліченно-нормовані простори є природними в постановках обернених задач потенціалу, оскільки ці задачі, як правило, зводяться до функціональних рівнянь з компактними (лінійними чи нелінійними) операторами, які в тому чи іншому банаховому просторі мають потужні нуль-множини. Однак, цей погляд навряд чи доцільно використовувати на практиці, оскільки вихідні дані задачі задаються в метриках просторів C чи ☹$^{(2)}$, інколи в $C^{(1)}$ чи ⌖$_2^{(1)}$ (коли похибка мала разом з першою її похідною).

Умови існування розв'язку задачі визначення контуру обмеженого зіркового тіла розкриває

Теорема 2.2 (існування). *Якщо збурююча область* ☟ *, що породжує зовнішній потенціал* $u(\varphi, r)$, *і круг* ☟$_0(0, \rho)$ *радіуса* ρ, $\rho < h = \min r$, *що індукує потенціал* $u_k(\varphi, r)$ *, мало відрізняються один від одного в сенсі виконання нерівності*

$$\max_{\alpha} |\zeta(\alpha)| < \min_{\alpha} R(\alpha - \varphi, \rho, r), \quad 0 \le \alpha, \varphi \le 2\pi,$$

де $\zeta(\alpha) + \rho = \rho(\alpha)$ *— однозначна функція, що описує конфігурацію границі* ∂☟ *області* ☟ *, а функція*

$$R(\alpha - \varphi, \rho, r) = (\rho^2 - 2\rho r \cos\alpha - \varphi + r^2)^{1/2},$$

то послідовність наближень $\{\zeta_n(\alpha)\}$, *яка генерується процесом*

$$\int_0^{2\pi} k(\alpha,\varphi;\nu)\zeta_n(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\rho}\left\{u(\varphi,r)-u_k(\varphi,r)-\int_0^{2\pi} f(\alpha-\varphi,\zeta_{n-1};\nu)d\alpha\right\},$$

$$n=0,1,2,\ldots,\infty;\quad \zeta_0(\alpha)=0,$$

збігається (за метрикою $C(0,2\pi)$) до функції $\zeta(\alpha)$, тобто до розв'язку $\rho(\alpha)$ нелінійного інтегрального рівняння

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\rho(\alpha)} \ln\frac{1}{\sqrt{s^2-2sr\cos(\alpha-\varphi)+r^2}}\, sds = u(\varphi,r)$$

за умови, що кожне з наближень $\zeta_n(\alpha)$ належить до компактної множини

✞$_0^{(1)}(A^*)=\{\zeta\colon \zeta^{(k)}\in$ ☹$^{(2)}(0,2\pi);\ \zeta^{(k)}(\alpha+2\pi)=\zeta^{(k)}(\alpha);\ \|\zeta^{(k)}\|_2\le c^{(k)},\ k=0,1\}$,

$$c^{(0)}=\pi\sqrt{2c+(2\ln h)^2}\,\|u\|_2;\quad c^{(1)}=\pi\sqrt{2c}\,\|u\|_2;\quad c=\frac{h^2}{h^2-\rho^2},$$

і що виконується нерівність

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\left|\ln\left(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|}{\left|\ln\left(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|}<2,\quad \text{де } \mu=\rho^{-1}\max|\zeta(\alpha)| \text{ і } \nu=h^{-1}\rho.$$

Доведення. Для встановлення збіжності послідовності $\{\zeta_n(\alpha)\}$ складемо різницю

$$\int_0^{2\pi}\rho k(\alpha,\varphi;\nu)[\zeta_n(\alpha)-\zeta_{n-1}(\alpha)]d\alpha = -\int_0^{2\pi}[f(\psi,\zeta_{n-1},\nu)-f(\psi,\zeta_{n-2},\nu)]d\alpha,$$

і спробуємо оцінити знизу ліву і зверху праву частини отриманої рівності. Нагадаємо, що тут

$$k(\alpha,\varphi,\nu)=-\ln R(\varphi,\rho,r),$$

$$f(\varphi,\zeta,\nu)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta^n(\alpha)}{n!}\frac{1}{\rho^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\rho^{n-2}}\ln\frac{1}{R(\varphi,\rho,r)}\right).$$

Введемо позначення

$$\zeta_1=\max_\alpha\zeta(\alpha),\qquad \zeta_2=\min_\alpha\zeta(\alpha),\qquad \zeta_0=\max_\alpha|\zeta(\alpha)|$$

і на підставі теореми 2.1 запишемо систему очевидних нерівностей

$$\Phi(\zeta_2)-f(\zeta_1)\le\rho\zeta_n(\alpha)\ln\frac{1}{R(\psi,\rho,r)}\le\Phi(\zeta_1)-f(\zeta_2),$$

$$f(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)\le-\rho\zeta_{n-1}(\alpha)\ln\frac{1}{R(\psi,\rho,r)}\le f(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2),$$

з якої визначаємо

$$-(\Delta\Phi+\Delta f)\le\rho[\zeta_n(\alpha)-\zeta_{n-1}(\alpha)]\ln\frac{1}{R(\psi,\rho,r)}\le\Delta\Phi+\Delta f,$$

де $\Delta\Phi=\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2)$, $\Delta f=f(\zeta_1)-f(\zeta_2)$, $\Phi(\zeta)=\rho\zeta\ln\frac{1}{R}+f(\zeta)$, $f(\zeta)=f(\varphi,\zeta,\nu)$, $\Phi(\zeta)=\Phi(\alpha,\zeta\ \rho;\varphi,r)$. Інтегруючи цю нерівність, одержуємо після нескладних, але громіздких викладок, що з одного боку

$$\left|\int_0^{2\pi}\rho k(\alpha,\varphi;\nu)[\zeta_n(\alpha)-\zeta_{n-1}(\alpha)]d\alpha\right|\ge$$

$$\ge 2\|\zeta_n-\zeta_{n-1}\|_C\left|\int_0^{2\pi}\left(\zeta_2\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{1}{R}+(\rho+\zeta_2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta_2^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\ln\frac{1}{R}\right)d\alpha\right|\ge$$

$$\geq 4\pi\rho(1-\mu)\left|\ln\left(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|\cdot\|\zeta_n-\zeta_{n-1}\|_C,$$

а з другого

$$\left|-\int_0^{2\pi}\{f(\psi,\zeta_{n-1},\nu)-f(\psi,\zeta_{n-2},\nu)\}d\alpha\right|\leq$$

$$\leq\|\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\|_C\left|\int_0^{2\pi}\left(\zeta_1^2\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{1}{R}+(\rho+\zeta_1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta_1^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\ln\frac{1}{R}\right)d\alpha\right|\leq$$

$$\leq 2\pi\rho(1+\mu)\left|\ln(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu})\right|\cdot\|\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\|_C.$$

Спеціально підкреслимо, що як нижня ліворуч, так і верхня праворуч оцінки виразу

$$\left|\int_0^{2\pi}\rho k(\alpha,\varphi;\nu)[\zeta_n(\alpha)-\zeta_{n-1}(\alpha)]d\alpha\right|$$

отримані за припущення, що не тільки сама гранична функція $\zeta(\alpha)$, але і всі її наближення $\zeta_n(\alpha)$ *мають*, принаймні, *перші похідні*, що *інтегруються,* тобто, що всі вони є елементами простору Соболева ⌖ $_2^{(1)}(0,2\pi)$. Якщо ж $\zeta_n(\alpha)\notin$ ⌖ $_2^{(1)}(0,2\pi)$, але є елементом ☹$^{(2)}(0,2\pi)$, то оцінка знизу виписаного виразу дорівнює нулю і обернення рівняння на довільних елементах ☹$^{(2)}(0,2\pi)$ не може бути побудоване.

Порівнюючи тепер між собою отримані вище оцінки для елементів послідовності $\{\zeta_n(\alpha)\}$ з ⌖ $_2^{(1)}(0,2\pi)$, приходимо до такого співвідношення

$$\|\zeta_n-\zeta_{n-1}\|_C\leq q\|\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\|_C,$$

де

$$q=\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\left|\ln(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu})\right|}{\left|\ln(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu})\right|}=const.$$

Звідси переконуємось, що послідовність $\{\zeta_n(\alpha)\}$ збігається в собі при $q<1$, оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta_{n+1}(\alpha)-\zeta_n(\alpha))$$

за цієї умови збігається, тому що

$$\|\zeta_n-\zeta_{n-1}\|_C\leq q\|\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\|_C\leq q^2\|\zeta_{n-2}-\zeta_{n-3}\|_C\leq\ldots\leq q^{n-1}\|\zeta_1-\zeta_0\|_C$$

і, виходить

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta_{n+1}(\alpha)-\zeta_n(\alpha))\right\|_C\leq\|\zeta_1-\zeta_0\|_C\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{\|\zeta_1-\zeta_0\|_C}{1-q}.$$

Але $q<1$, якщо виконуються умови теореми. Дійсно, умови теореми виконуються, якщо

$$\left|\ln(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu})\right|\cdot\left|\ln(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu})\right|^{-1}\sim 1, \qquad (2.6)$$

тобто, якщо $\mu\nu<1-\nu$. А це співвідношення завжди виконується для функцій класу ✞$^{(1)}(A^*)\subseteq$ ⌖ $_2^{(1)}(0,2\pi)$, тому що воно еквівалентне до вимоги $-m<\zeta(\alpha)<m$, $m=h-\rho>0$.

У випадку, коли виконується вимога (2.6), варіація параметра μ не перевищує 3^{-1}, тобто амплітуда відхилення області ☟ від круга ☟$_0(0,\rho)$ не перевершує $3^{-1}\rho$.

Множина ✞$^{(1)}(A^*)$ замкнута за нормою

$$\|\zeta\|^{(1)} = \left(\|\zeta\|^2 + \|\zeta'\|^2\right)^{1/2}$$

і тому послідовність $\{\zeta_n(\alpha)\}$ збігається до деякої функції $\zeta(\alpha)$ з $\mathcal{M}^{(1)}(A^*)$.

Переконаємося, що функція $\rho(\alpha) = \rho + \zeta(\alpha)$ є шуканим розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\rho(\alpha)} \ln \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2sr\cos(\alpha - \varphi) + r^2}} sds = u(\varphi, r).$$

Для цього в обох частинах рівності

$$\int_0^{2\pi} \rho k(\alpha, \varphi; \nu)\zeta_n(\alpha)d\alpha = u(\varphi, r) - u_k(\varphi, r) - \int_0^{2\pi} f(\psi, \zeta_{n-1}, \nu)d\alpha$$

перейдемо до границі за індексом $n \to \infty$ і одержимо вираз

$$\int_0^{2\pi} \rho\zeta \ln \frac{1}{R} d\alpha = u - u_k - \int_0^{2\pi} f(\psi, \zeta, \nu)d\alpha,$$

який, за попереднім поданням функції $f(\psi, \zeta, \nu)$, можемо переписати у вигляді

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1} \frac{\partial^{n-2}}{\partial\rho^{n-2}} \ln \frac{1}{R}\right) d\alpha = u - u_k.$$

Посилаючись тепер на теорему 2.1 і визначення

$$u_k(\varphi, r) = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\rho} \ln \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2sr\cos(\alpha - \varphi) + r^2}} sds,$$

переконуємося в справедливості теореми.

В перебігу доведення теореми існування обкреслено контури множин, у яких варто шукати нормальні розв'язки рівняння задачі. Це, перш за все, обмежені множини типу $\mathcal{M}^{(1)}(A^*)$ в просторі Соболєва $W_2^{(1)}(0, 2\pi) \subset L^{(2)}(0, 2\pi)$. Незабаром ми переконаємося, що на цих множинах задача поставлена коректно. На інших же множинах, як показують обчислення якісних ознак [105], задача визначення області за значеннями потенціалу занадто нестійка. Наведені в [105] чисельні оцінки відхилення двох тіл і відповідних їм різниць зовнішніх потенціалів цікаві самі по собі в тому відношенні, що дозволяють розмірковувати не тільки про характер стійкості задач, але і про неперервність оберненого відображення, а також і про те, що критерії стійкості даної задачі виконуються винятково на відповідних компактних класах єдиності її розв'язків. При цьому останні визначаються повністю теоремою єдиності Новікова [42].

Для доведення теореми стійкості розв'язку задачі (2.3) на $\mathcal{M}^{(1)}(A^*)$ знадобиться одне допоміжне твердження щодо залежності між полями та «подібними» областями, що їх обумовлюють. Тут під «подібними» розуміються такі області T_1 і T_2, границі ∂T_i, $i = 1, 2$, яких описуються відповідно функціями

$$\zeta_1(\alpha) = \zeta(\alpha)$$
$$\zeta_2(\alpha) = \zeta(\alpha) + c, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$$

де c — деяка стала. Введемо в розгляд параметри

$$\zeta_1 = \max_{\alpha} \zeta_1(\alpha), \quad \zeta_2 = \min_{\alpha} \zeta_1(\alpha), \quad \mu = |\zeta_2|\rho^{-1}, \quad \nu = \rho r^{-1},$$

що характеризують границю ∂T_1 області T_1 і її місцезнаходження щодо апроксимуючого область круга радіуса ρ і круга радіуса $r \ge h$, на границі якого задані вихідні дані задачі (2.3) (з цієї пори і надалі, якщо не обумовлене протилежне, будемо вважати поле заданим на колі радіуса r, що охоплює збурююче тіло T і ніде з ним не перетинається). В термінах визначальних параметрів справедлива

Лема 2.1. *Якщо поля* $u^{(i)}(\varphi, r)$, *породжені двома подібними однорідними класу Ляпунова* ☹$ap^{(1,\alpha)}$ *областями* 👎$_i$, $i = 1, 2$, *незначно ухиляються одне від одного, тобто задовільняють умові*

$$\| u^{(1)}(\varphi, r) - u^{(2)}(\varphi, r) \|_C < \varepsilon ,$$

за досить малого $\varepsilon > 0$, *то і самі області мало відрізняються між собою в сенсі виконання нерівності*

$$\| \zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha) \|_C \le a\varepsilon,$$

де $a = a(\mu, \nu)$ *стала, пов'язана з параметрами границі однієї з подібних областей.*

Для доведення леми досить оцінити знизу різницю

$$u^{(1)}(\varphi, r) - u^{(2)}(\varphi, r) = \int_0^{2\pi} \{\Phi(\zeta_1(\alpha)) - \Phi(\zeta_2(\alpha))\} d\alpha$$

на ✞$^{(1)}(A^*)$. Посилаючись на теорему 2.1 і використовуючи очевидне співвідношення для різниці $\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) = \Phi'(\zeta) c$ будемо мати відповідно з прийнятими раніше позначеннями параметрів і формулами (2.1а)

$$\left\| u^{(1)}(\varphi, r) - u^{(2)}(\varphi, r) \right\|_C \ge 2\pi c \rho (1 - \mu) \left| \ln(1 + \frac{\mu\nu}{1-\nu}) \right| .$$

Якщо тепер покласти

$$a(\mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \left(\rho(1-\mu) \left| \ln(1 + \frac{\mu\nu}{1-\nu}) \right| \right)^{-1} ,$$

то твердження леми буде доведено.

На підставі встановленої леми доводиться наступна

Теорема 2.3 (стійкості). *Якщо однозначні функції* $\zeta_i(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, *що описують границі* ∂👎$_i$ *зірчастих однорідних обмежених областей* 👎$_i$, *належать до компактної множини* ✞$^{(1)}(A^*)$ *і задовільняють (крім обмеженості в середньому похідних) додатковим вимогам*

$$\left\| \frac{d\zeta_i(\alpha)}{d\alpha} \right\|_C < m < \infty,$$

а породжувані областями потенціали $u^{(i)}(\varphi, r)$, $i = 1, 2$, *незначно ухиляються один від одного в сенсі виконання нерівності*

$$\left\| u^{(1)}(\varphi, r) - u^{(2)}(\varphi, r) \right\|_C < \varepsilon$$

за досить малого $\varepsilon > 0$, *то самі області мало розрізняються між собою, так що згадані функції підкоряються умові*

$$\| \zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha) \|_C \le a\varepsilon,$$

де $a = a(\mu, \nu)$ *— стала, залежна від параметрів класу* ✞$^{(1)}(A^*)$.

Доведення. Складемо різницю

$$\rho \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{R(\alpha - \varphi)} [\zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha)] d\alpha = u^{(1)}(\varphi) - u^{(2)}(\varphi) - \int_0^{2\pi} [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)] d\alpha,$$

і визначимо на підставі теореми 2.1 ланцюжок нерівностей

$$\left\| \left| \int_0^{2\pi} [\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)] d\alpha \right| - \left| \int_0^{2\pi} [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)] d\alpha \right| \right\| \le \left| \rho \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{R(\alpha - \varphi)} [\zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha)] d\alpha \right| \le$$

$$\leq \left\| u^{(1)}(\varphi) - u^{(2)}(\varphi) \right\|_C + \left| \int_0^{2\pi} [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)] d\alpha \right|. \qquad (2.7)$$

Звідси видно, що доведення теореми зводиться до оцінки знизу функціонала

$$\left| \int_0^{2\pi} [\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)] d\alpha \right|$$

і оцінки зверху функціонала

$$\left| \int_0^{2\pi} [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)] d\alpha \right|. \qquad (2.8)$$

Введемо позначення $\zeta_{11} = \max_\alpha \zeta_1(\alpha)$, $\zeta_{21} = \min_\alpha \zeta_1(\alpha)$, $\zeta_{12} = \max_\alpha \zeta_2(\alpha)$, $\zeta_{22} = \min_\alpha \zeta_2(\alpha)$, $\zeta_0 = \max\left(\zeta_{11}, \zeta_{12}, |\zeta_{21}|, |\zeta_{22}|\right)$ і на підставі теореми 2.1 за допомогою нескладних, але громіздких, перетворень на ✞ $^{(1)}(A^*)$, аналогічних до тих, які використовувалися для доведення теореми 2.2, знайдемо, що

$$\left| \int_0^{2\pi} [\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)] d\alpha \right| \geq \left| \int_0^{2\pi} \rho \quad (\zeta_{12} - \zeta_{21}) \ln R(\alpha - \varphi) d\alpha + \int_0^{2\pi} \zeta_{21} \quad (\zeta_{12} - \zeta_{21}) \ln R(\alpha - \varphi) d\alpha + \right.$$

$$\left. + (\zeta_{12} - \zeta_{21}) \int_0^{2\pi} (\rho + \zeta_{21}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{21}{}^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \ln R(\alpha - \varphi) d\alpha \right|.$$

Згадуючи (2.1а) і позначаючи $\mu = \zeta_0 \rho^{-1}$, $\nu = \rho r^{-1}$, одержимо

$$\left| \int_0^{2\pi} [\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)] d\alpha \right| \geq \qquad 2\pi \rho (1 - \mu) \left| \ln\left(1 + \frac{\mu\nu}{1 - \nu}\right) \right| \left\| \zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha) \right\|_C. \qquad (2.9)$$

Визначимо тепер оцінку зверху для функціонала (2.7), з огляду на приналежність функцій $\zeta_i(\alpha)$ до компакту ✞ $^{(1)}(A^*)$. Для цього введемо в розгляд δ - мережу

$$\zeta_{1\delta}(\alpha) = \zeta_1(\alpha),$$

$$\zeta_{2\delta}(\alpha) = \zeta_1(\alpha) + \delta$$

у вигляді границь «подібних» областей. Варіацію функціонала (2.8) можемо подати в цьому випадку в такий спосіб

$$\left| \int_0^{2\pi} [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)] d\alpha \right| = \left| \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\rho^{\ \ n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial^{n-2}}{\partial \rho^{\ \ n-2}} \ln \frac{1}{R(\psi)} \right) \left[\zeta_1^n(\psi + \varphi) - \zeta_1^n(\psi + \varphi_1) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \zeta_{1\delta}^n(\psi + \varphi_1) - \zeta_{2\delta}^n(\psi + \varphi_1) + \zeta_{2\delta}^n(\psi + \varphi_1) - \zeta_2^n(\psi + \varphi_1) + \zeta_2^n(\psi + \varphi_1) - \zeta_2^n(\psi + \varphi) \right] \right\} d\psi \right|,$$

де $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$, а $|\Delta\varphi| \leq 2^{-1}\varepsilon$. Звідси, з огляду на умову теореми, яка стосується оцінки похідних у вигляді $\| \zeta_i' \| < m$, відразу ж приходимо до нерівності

$$\left| \int_0^{2\pi} \left[f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \right] d\alpha \right| \leq \left(m\varepsilon + \left\| \zeta_{1\delta} - \zeta_{2\delta} \right\|_C + \left\| \zeta_2 - \zeta_{2\delta} \right\|_C \right) \left| -(\rho + \zeta_0) \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_0^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \ln R(\psi) d\psi \right|.$$

А так як відповідно до леми 2.1

$$\left\| \zeta_{1\delta}(\psi + \varphi_1) - \zeta_{2\delta}(\psi + \varphi_1) \right\|_C \leq a(\mu, \nu)\varepsilon,$$

і за визначенням δ - мережі

$$\left\| \zeta_2(\psi + \varphi_1) - \zeta_{2\delta}(\psi + \varphi_1) \right\|_C \leq 2a(\mu, \nu)\varepsilon,$$

то, посилаючись на (2.1а), можемо записати

$$\left|\int_0^{2\pi}\left[f(\zeta_1)-f(\zeta_2)\right]d\alpha\right| \le 2\pi\rho(1+\mu)\left|\ln\left(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|(m+3a(\mu,\,\nu))\varepsilon. \qquad (2.10)$$

Для завершення доведення теореми визначимо з ланцюжка нерівностей (2.7) і отриманих оцінок (2.9) і (2.10) відхилення однієї функції $\zeta_1(\alpha)$, що описує границю збурюючої області, від іншої такої ж функції $\zeta_2(\alpha)$ в залежності від міри $\varepsilon > 0$ відхилення потенціалів (створюваних близькими областями). Будемо мати

$$\left\|\zeta_1(\alpha)-\zeta_2(\alpha)\right\|_C \le b\varepsilon,$$

де поріг $b = b(\rho,\, m,\, \mu,\, \nu)$, як неважко обчислити, визначається співвідношенням

$$b(\rho,\, m,\, \mu,\, \nu) = 2m\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\left|\ln\left(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|\cdot\left|\ln\left(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|^{-1}+$$

$$+\frac{3(1+\mu)}{\pi\rho(1-\nu)}\cdot\left|\ln\left(1-\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|\cdot\left|\ln\left(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|^{-1}+\left[2\pi\rho(1-\mu)\left|\ln\left(1+\frac{\mu\nu}{1-\nu}\right)\right|\right]^{-1}.$$

Стала $b = b(\rho,\, m,\, \mu,\, \nu)$ характеризує коректність постановки задачі визначення однорідної області в класі $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$ зірчастих областей, обмежених неперервно диференційованими контурами з обмеженими похідними.

2.4. Стійкий спосіб розв'язування задачі (2.4) — заміна задачею мінімізації функціонала нев'язки [105]. Задачу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$A\zeta = v,\;\; \zeta \in \mathcal{V}^{(1)}(A^*),\;\; v \in \mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi), \qquad (2.4)$$

з самоспряженим компактним оператором A замінимо задачею *мінімізації* квадратичного функціонала нев'язки

$$F(\zeta) = \left\|A\zeta - v\right\|^2 = (A\zeta - v,\; A\zeta - v)$$

або функціонала типу нев'язки

$$F_C(\zeta) = (A\zeta - 2v,\; \zeta)$$

на компактній множині $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$ з $\mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi)$. В зв'язку з цим позначимо через $u = P_{V(A)}v$ проекцію точки $v \in \mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi)$ на множину

$$\mathcal{V}(A) = \{u(t):\; u \in \mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi),\;\; t \in [0,\, 2\pi];\;\; u = A\zeta,\;\; \zeta \in \mathcal{V}^{(1)}(A^*)\},$$

через

$$\zeta_* = \zeta_*(t) = \arg\inf_{\zeta\in\mathcal{V}^{(1)}(A^*)} F(\zeta)\left(\text{ или } \arg\inf_{\zeta\in\mathcal{V}^{(1)}(A^*)} F(\zeta)\right),\;\; t \in [0,\, 2\pi],$$

точку нижньої грані $F_* = F(\zeta_*)\left(\text{або } F_C(\zeta_*)\right)$ функціонала $F(\zeta)$ (чи $F_C(\zeta)$) на $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$, а через

$$\mathcal{V}_*^{(1)} = \{\zeta(t):\, \zeta \in \mathcal{V}^{(1)}(A^*),\, t \in [0,\, 2\pi];\;\; \Phi(\zeta) = F_* = \inf_{V^{(1)}(A^*)} \Phi(\zeta)\}$$

множину всіх точок мінімуму функціонала $\Phi(\zeta) = F(\zeta)$ (чи $F_C(\zeta)$) на області $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$ $\subset \mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi)$ визначення нормальних розв'язків лінійного інтегрального рівняння (2.4).

Таким чином, задача розв'язування інтегрального рівняння (2.4) і задача мінімізації кожного з функціоналів $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ *еквівалентні* одна одній тільки на множині $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$. Множини всіх точок мінімуму функціоналів на $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$ непорожні і складаються кожна з єдиної точки, що слугує нормальним розв'язком заданого рівняння. В той же час відношення еквівалентності між задачами зникає при переході від підпростору $\mathcal{V}^{(1)}(A^*)$ до всього простору $\mathcal{L}^{(2)}(0,\, 2\pi)$. Це пов'язано з тим, що властивості розглянутих функціоналів над

$☹^{(2)}(0,2\pi)$ у значній мірі визначаються властивостями оператора задачі, що діє в тому ж просторі. Цей оператор прямої відповідності є обмеженим, неперервним і компактним (пункт 2.2). А відображення множини вихідних даних на множину розв'язків представляються взагалі розривними в $☹^{(2)}(0,2\pi)$. Безумовно, що ці особливості оператора задачі повинні відбиватися в характеристичних властивостях розглянутих функціоналів. Частково їх розкриває

Теорема 2.4 [78]. *Функціонал $\Phi(\zeta)$ (F чи F_C) над гільбертовим простором $☹^{(2)}(0,2\pi)$ є опуклим. Множина $✞_*^{(1)}$ всіх точок мінімуму $\Phi(\zeta)$ незамкнута й у будь-якій кулі $S(x_*,\varepsilon)$ радіуса $\varepsilon>0$ з центром у точці $x_*\in✞_*^{(1)}$ знайдеться хоча б одна точка $\zeta_*=x_*+y\in☹^{(2)}(0,2\pi)$, $y\in☠(A)$, відмінна від x_*, у якій функціонал $\Phi(\zeta)$ досягає своєї нижньої грані Φ_*. Гіперповерхня, що описується функціоналом, являє собою циліндр з твірними типу параболи, а множина U_* усіх точок мінімуму функціонала $\Phi(\zeta)$ над $☹^{(2)}(0,2\pi)$ — це гіперплощина $✞_*^{(1)}\oplus☠(A)$.*

Висновок 1. *Задача мінімізації функціоналів $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ над $U_*\subset☹^{(2)}(0,2\pi)$ некоректна.*

Висновок 2. *Критерій близькості «теоретичного» $u=A\zeta_*$ і «спостереженого» v полів у метриці простору $☹^{(2)}(0,2\pi)$ не є ознакою оптимального розв'язку (*квазірозв'язку*) $x_*\in✞_*^{(1)}$ задачі.*

Дійсно, будь-яка мінімізуюча послідовність $\{\zeta_n(\alpha)\},\lim\Phi(\zeta_n)=\Phi_*$ при $n\to\infty$, завжди збігається до множини U_* всіх точок ζ_* мінімуму $\Phi(\zeta)$ на $☹^{(2)}(0,2\pi)$, у той час як до множини $✞_*^{(1)}$ єдиності розв'язку рівняння $A\zeta=v$ може і не збігатися при $\Phi=F$ чи $\Phi=F_C$. У свою чергу, оскільки множина U_* усіх точок мінімуму $F(\zeta)$ на $☹^{(2)}(0,2\pi)$ — це гіперплощина потужності множини $☠(A)$, то мінімальність нев'язки $\sqrt{F_*}$ не може гарантувати вдалий вибір розв'язку задачі. Обраний за нев'язкою $\sqrt{F_*}$ розв'язок $\zeta_*=x_*+y$, $x_*\in✞_*^{(1)}$, $y\in☠(A)$, може відрізнятися за нормою $☹^{(2)}(0,2\pi)$ від точного нормального x_* *на довільно велику* величину. Тому критерій нев'язки для вибору на $☹^{(2)}(0,2\pi)$ ефективного розв'язку задачі варто вважати *недоцільним.*

У зв'язку з пошуком мінімумів функціоналів $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ поглибимо вивчення їх аналітичних властивостей розглядом диференціальних характеристик цих функціоналів.

Теорема 2.5 [78]. *Функціонали $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ двічі неперервно диференційовані над $☹^{(2)}(0,2\pi)$, їхні градієнти $F'(\zeta)$ і $F_C'(\zeta)$ належать до класу $C^{(1,1)}(☹^{(2)})$ з константами Ліпшиця $L=2\|A^*A\|$ і $L=2\|A\|$ відповідно. Кожний з функціоналів над будь-якими елементами ζ, η з $☹^{(2)}(0,2\pi)$ задовільняє одній із наступних нерівностей*

$$\Phi(\zeta)\ge\Phi(\eta)+(\Phi'(\eta),\zeta-\eta),\quad(\Phi'(\zeta)-\Phi'(\eta),\zeta-\eta)\ge0;\quad(\Phi''(\zeta)\eta,\eta)\ge0;$$

де $\Phi=F$ чи $\Phi=F_C$.

Нерівності, які визначають опуклість функціоналів $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$, не можуть бути посилені до нерівностей

$$(\Phi'(\zeta)-\Phi'(\eta),\zeta-\eta)\ge\mu\|\zeta-\eta\|^2,\ (\Phi''(\zeta)\eta,\eta)\ge\mu\|\eta\|^2$$

при $\mu>0$ тому, що оператори A^*A і A мають потужні нуль-множини $☠(A^*A)=☠(A)$. І тільки в зв'язку з цим функціонали $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ не є строго опуклими; константа μ в приведених вище нерівностях неминуче дорівнює нулю, а множини U_* мінімуму всіх точок $F(\zeta)$ чи $F_C(\zeta)$ над $☹^{(2)}(0,2\pi)$ необмежені. Виявляється цікавою інтерпретація отриманого результату. В банахових просторах умови

$$\Phi'(\zeta_*) = 0, \quad (\Phi''(\zeta_*)e, e) > 0, \quad e \neq 0,$$

на відміну від аналогічних вимог для звичайних функцій *не є достатніми* для (глобального) мінімуму функціонала $\Phi = F$ або $\Phi = F_C$. Дійсно, якщо глобальний мінімум Φ_* функціонала $\Phi(\zeta)$ досягається в точці $x_* \in \text{✞}_*^{(1)} \subset U_*$, то відповідно до теореми 2.4 він досягається і в будь-якій точці $\zeta_* = x_* + y$ простору $\text{☹}^{(2)}(0, 2\pi)$, де $y \in \text{☠}(A)$. Тому хоча будь-яка мінімізуюча послідовність $\{\zeta_n\}$ функціонала $\Phi(\zeta)$ завжди збігається до множини U_*, до множини $\text{✞}_*^{(1)}$ коректності може і не збігатися, тому що в будь-якому околі $S(x_*, \varepsilon)$ глобального мінімуму присутні точки з нуль-множини $\text{☠}(A)$ оператора A.

Множина Лебега

$$\text{☹}(F, \varepsilon^2) = \{\zeta(\alpha) : \| A\zeta - v \|^2 < \varepsilon^2; \quad \zeta, v \in \text{☹}^{(2)}(0, 2\pi)\}$$

за досить малого $\varepsilon > 0$ занадто широка. Вона містить елементи, близькі до (точного) нормального розв'язку x_* і як завгодно далекі від нього. Вибір елемента з цієї множини як оптимального розв'язку задачі, за точністю порівнянного з точністю вихідних даних, можна здійснити за допомогою коректування мінімізуючих послідовностей функціонала $\Phi(\zeta)$ на множині $\text{😐}_\Pi^{(1)} = U_* \cap \text{✞}_*^{(1)}$, що містить, очевидно, шуканий нормальний розв'язок рівняння (2.4).

Для коректування мінімізуючих послідовностей $\Phi(\zeta)$ використаємо стабілізатори наступного типу

$$\Omega(\zeta) = (D\zeta, D\zeta) \equiv \int_0^{2\pi} \left(\zeta(\alpha) + q \frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha,$$

$$\Omega_C(\zeta) = (\zeta, D\zeta) \equiv \int_0^{2\pi} \zeta(\alpha) \left(\zeta(\alpha) + q \frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha} \right) d\alpha,$$

які визначені на множині

$$\text{😐}_\Pi^{(1)}(\Psi, c) = \{\zeta(\alpha) \colon \zeta^{(k)} \in \text{☹}^{(2)}(0, 2\pi); \quad \zeta^{(k)}(\alpha + 2\pi) = \zeta^{(k)}(\alpha); \quad \Psi(\zeta) \le c, \; k = 0, 1\}$$

за допомогою диференціального оператора $D = E + q \dfrac{\partial}{\partial \alpha}$, де E — тотожний в $\text{☹}^{(2)}(0, 2\pi)$ оператор, $\Psi = \Omega$ чи $\Psi = \Omega_C$, $q > 0$ — число, що означає вагу похідної, $c = const$. Ясно, що множина $\text{😐}_\Pi^{(1)}(\Psi, c)$, як перетин множин U_* і $\text{✞}_*^{(1)}$, *містить* точний розв'язок рівняння (2.4).

Властивості наведених стабілізаторів описує

Теорема 2.6. *Функціонали $\Omega(\zeta)$ і $\Omega_C(\zeta)$ на множині $\text{😐}_\Pi^{(1)}(\Psi, c)$ додатні, сильно опуклі, диференційовані функції класу $C^{(2)}(\text{😐}_\Pi^{(1)})$, мають градієнти класу $C^{(1,1)}(\text{😐}_\Pi^{(1)})$ і задовільняють нерівності*

$$\Psi(\zeta) \ge \Psi(\eta) + (\Psi'(\eta), \zeta - \eta) + \| \zeta - \eta \|^2, \qquad (\Psi'(\zeta) - \Psi'(\eta), \zeta - \eta) \ge 2\| \zeta - \eta \|^2,$$

$$(\Psi''(\zeta)\eta, \eta) \ge 2\| \eta \|^2,$$

де $\Psi = \Omega$ чи $\Psi = \Omega_C$.

Доведення. Функціонал $\Omega(\zeta)$ *додатній* за визначенням. А так як, очевидно,

$$2\int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \frac{\partial \zeta(\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \zeta^2(\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0, \tag{2.11}$$

то і функціонал

$$\Omega_C(\zeta) = \int_0^{2\pi} \zeta(\alpha)(\zeta(\alpha) + q \frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha}) d\alpha = \int_0^{2\pi} \zeta^2(\alpha) d\alpha = (\zeta, \zeta) > 0$$

додатній. *Сильна опуклість* першого з функціоналів випливає з того, що для довільних чи-

сел α і β з відрізка $[0,1]$, підлеглих умові $\alpha+\beta=1$, і довільних елементів $\zeta(\alpha)$, $\eta(\alpha)$ множини 😐$^{(1)}_{\Pi}(\Psi, c)$, функціонал можна записати у вигляді

$$\Omega(\alpha\zeta+\beta\,\eta)=\Omega(\alpha\zeta+\beta\,\eta)+(\alpha-\alpha)\Omega(\zeta)+(\beta-\beta)\Omega(\eta)=\alpha\,\Omega(\zeta)+\beta\,\Omega(\eta)-$$
$$-\alpha\beta\int_0^{2\pi}\{(\zeta-\eta)^2+q^2(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial\alpha})^2+2q\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-2q\frac{\partial}{\partial\alpha}(\zeta\eta)+2q\eta\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\}d\ ,$$

який на підставі рівностей (2.11) і (2.12)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta(\varphi)\eta(\varphi))d\varphi=\zeta(\varphi)\eta(\varphi)\Big|_0^{2\pi}=0 \qquad (2.12)$$

перетвориться до такого

$$\Omega(\alpha\zeta+\beta\eta)\le\alpha\Omega(\zeta)+\beta\Omega(\eta)-\alpha\beta\|\zeta-\eta\|^2. \qquad (2.13)$$

Міркуючи аналогічно, з тими ж числами α й β і елементами з 😐$^{(1)}_{\Pi}(\Psi, c)$, одержимо

$$\Omega_C(\alpha\zeta+\beta\eta)=\alpha\Omega_C(\zeta)+\beta\Omega_C(\eta)-\alpha\beta\|\zeta-\eta\|^2. \qquad (2.14)$$

Для доведення властивості *диференційованості* розглянемо відповідні прирости функціоналів. Якщо функція $\zeta(\alpha)$ та її варіація $\eta(\alpha)$ суть елементи з 😐$^{(1)}_{\Pi}(\Psi, c)$, то, з огляду на рівності типу (2.11) і (2.12) і визначення *самоспряженого* оператора $D^*=E-q\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ будемо мати

$$\Delta\Omega(\zeta)=\Omega(\zeta+\eta)-\Omega(\zeta)=2\int_0^{2\pi}D^{(2)}\zeta(\alpha)\eta(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2D^{(2)}\eta(\alpha)\eta(\alpha)d\alpha,$$

де

$$D^{(2)}=D^*D=\left(E-q\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(E+q\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)=E-q^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2},$$

З отриманого подання видно, що

$$\Omega'(\zeta)=2D^{(2)}\zeta\equiv2D^*D\zeta=2[\zeta(\alpha)-q^2\frac{\partial^2\zeta(\alpha)}{\partial\alpha^2}],\ \ \Omega''(\zeta)=2D^{(2)}=2D^*D. \qquad (2.15)$$

Аналогічно отримуємо

$$\Delta\Omega_C(\zeta)=2\int_0^{2\pi}\zeta(\alpha)\eta(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2D\eta(\alpha)\eta(\alpha)d\alpha,$$

що дає

$$\Omega'_C(\zeta)=2\zeta(\alpha),\qquad\qquad \Omega''_C(\zeta)=2D. \qquad (2.16)$$

Для доведення приналежності градієнтів $\Omega'(\zeta)$ і $\Omega'_C(\zeta)$ до класу $C^{(1,\,1)}($😐$^{(1)}_{\Pi})$ звузимо клас розглянутих функцій, жадаючи, щоб елементи $\zeta(\alpha)$ мали узагальнені похідні до другого порядку, а прирости $\eta(\alpha)$ — узагальнені похідні до четвертого порядку включно. Позначимо множини цих функцій відповідно через $\overset{\circ}{⌖}{}^{(2)}_{2}(0,2\pi)$ і $\overset{\circ}{⌖}{}^{(4)}_{2}(0,2\pi)$. Безпосередньо з формул (2.15) і (2.16) видно, що градієнти $\Omega'(\zeta)$ і $\Omega'_C(\zeta)$ — це елементи ☹$^{(2)}(0,2\pi)$ і тому для першого з них можемо записати при $\eta\in\overset{\circ}{⌖}{}^{(4)}_{2}(0,2\pi)$ рівності

$$\|\Omega'(\zeta+\eta)-\Omega'(\zeta)\|^2=4\left\|\eta-q^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\right\|^2,\qquad\qquad \|\Omega'(\zeta+\eta)-\Omega'(\zeta)\|^2=4(D^{(4)}\eta,\eta),$$

тому що

$$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\right) = \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial\alpha^3}d\alpha = \eta\frac{\partial^3\eta}{\partial\alpha^3}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\eta\frac{\partial^4\eta}{\partial\alpha^4}d\alpha,$$

$$D^{(4)} = E - 2q^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + q^4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} = \left(E - q^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\left(E - q^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right) = D^{(2)}D^{(2)}.$$

Звідси, застосовуючи нерівність Коші-Буняківського, знаходимо нерівність

$$\|\Omega'(\zeta+\eta) - \Omega'(\zeta)\| \le 2\|D^{(4)}\eta\|\cdot\|\eta\|.$$

Посилаючись на цю нерівність, переконуємося, що коли число $\|D^{(4)}\eta\|$ обмежене, то

$$\|\Omega'(\zeta+\eta) - \Omega'(\zeta)\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \|\eta\| \to 0.$$

А це у свою чергу означає, що градієнт $\Omega'(\zeta)$ є елементом класу $C^{(1,\,1)}(\text{😐}_{П}^{(1)})$. Далі градієнт $\Omega'_C(\zeta)$ на множині $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$ також належить до класу $C^{(1,\,1)}(\text{😐}_{П}^{(1)})$, оскільки

$$\|\Omega'_C(\zeta+\eta) - \Omega'_C(\zeta)\| = 2\|\eta\| \to 0.$$

В той же час для операторів $\Omega''(\zeta)$ і $\Omega''_C(\zeta)$ з їхніми зображеннями у вигляді (2.15) і (2.16) відповідно матимемо

$$|\,([\Omega''(\zeta+\eta) - \Omega''(\zeta)]\eta,\, \eta)\,| = 2\,|\,([D^{(2)} - D^{(2)}]\eta,\, \eta)\,| \equiv 0,$$

$$|\,([\Omega''_C(\zeta+\eta) - \Omega''_C(\zeta)]\eta,\, \eta)\,| = 2\,|\,([D - D]\eta,\, \eta)\,| \equiv 0$$

і тому $\Omega(\zeta)$, $\Omega_C(\zeta) \in C^{(2)}(\text{😐}_{П}^{(1)})$.

Доведення заключної частини теореми проводиться з використанням прийомів доведення теореми 2.5 на підставі визначень (2.13) і (2.14) сильної опуклості функціоналів.

Висновок. *Функціонали* $\Omega(\zeta)$ *і* $\Omega_C(\zeta)$ *на множинах* $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Psi,\, c)$, $\Psi = \Omega, \Omega_C$, *не мають локальних мінімумів, що відрізняються від глобального, який досягається на елементі* $\zeta(\alpha) \equiv 0$, $\alpha \in [0,\, 2\pi]$.

Вивчимо більш докладно області визначення $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Psi,\, c)$ функціоналів $\Omega(\zeta)$ і $\Omega_C(\zeta)$. Зосередимо спершу увагу на області $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$ і переконаємось, що вона *компактна* в $C[0,\, 2\pi]$ за будь-якого значення постійної $c \ge 0$. В зв'язку з цим відзначимо, що на відрізку $[0,\, 2\pi]$ завжди існує хоча б одна точка φ_0 така, що для будь-якої функції $\zeta(\varphi)$ з нерівності $\Omega_C(\zeta) \le c$ стане справедливим ланцюжок нерівностей

$$2\pi\,|\,\zeta(\varphi_0)\,|^2 \le \int_0^{2\pi}|\,\zeta(\alpha)\,|^2 d\alpha \le c,$$

який у свою чергу приводить до обмеження $|\,\zeta(\varphi_0)\,| < \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/2}$. З урахуванням цього обмеження для будь-якої функції $\zeta(\varphi)$ з множини $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$ можемо записати (на підставі нерівності Коші-Буняківського)

$$|\,\zeta(\varphi)\,| = \left|\zeta(\varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\zeta'(\alpha)d\alpha\right| \le \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/2} + \left(2\pi\int_{\varphi_0}^{\varphi}|\,\zeta'(\alpha)\,|^2 d\alpha\right)^{1/2} = M = const.$$

Звідси випливає *рівномірна обмеженість* множини $\text{😐}_{П}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$. А тому що (з урахуванням тієї ж нерівності)

$$|\,\zeta(\alpha) - \zeta(\beta)\,| = \left|\int_{\beta}^{\alpha}\zeta'(\varphi)d\varphi\right| \le (\alpha-\beta)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}|\,\zeta'(\varphi)\,|^2 d\varphi\right)^{1/2} \le \left(c\,|\,\alpha-\beta\,|\right)^{1/2}$$

для всіх функцій $\zeta(\alpha)\in \text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$, то $\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$, очевидно, *одностайно неперервна* (у метриці $C[0,\, 2\pi]$). На підставі відомої теореми Арцела [29] множина $\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega_C,\, c)$ рівномірно обмежених і одностайно неперервних функцій є компактною.

Для того щоб переконатися в *компактності* множині $\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega,\, c)$ (у тій же метриці) достатньо функціонал $\Omega(\zeta)$ подати на підставі рівності (2.11) у вигляді

$$\Omega(\zeta)=\int_0^{2\pi}\left[\zeta^2(\alpha)+q^2\left(\frac{\partial\zeta(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2\right]d\alpha$$

і відзначити, що з нерівності $\Omega(\zeta)\le c$ випливають нерівності

$$\int_0^{2\pi}\zeta^2(\alpha)d\alpha\le c,\qquad q^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\zeta(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha\le c$$

Звідси, модифікуючи відповідним чином попередні викладки, неминуче встановимо компактність множини $\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega,\, c)$.

Звернемо тепер увагу на спектральні характеристики операторів, за допомогою яких сконструйовані функціонали $\Omega(\zeta)$ і $\Omega_C(\zeta)$. Виділимо в множині $\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega,\, c)$ підмножину

$$\text{☺}_{\Pi}^{(2)}(\Omega,\, c)=\{\zeta(\varphi)\colon \zeta\in\text{☺}_{\Pi}^{(1)}(\Omega,\, c),\;\; \zeta''\in\text{☹}^{(2)}(0,\, 2\pi);\;\; \zeta''(\varphi+2\pi)=\zeta''(\varphi)\},$$

і подамо на цій підмножині функціонал $\Omega(\zeta)$ у вигляді

$$\Omega(\zeta)=(\zeta,\, D^*D\zeta)\equiv(\zeta,\, D^{(2)}\zeta)\,.$$

Якщо $\zeta\,(\varphi)$ і $\eta\,(\varphi)$ суть *припустимі* функції (з $\text{☺}_{\Pi}^{(2)}(\Omega,\, c)$), то

$$(\eta,\, D^{(2)}\zeta)-(\zeta,\, D^{(2)}\eta)=q^2\{-\eta(\varphi)\zeta'(\varphi)\Big|_0^{2\pi}+\zeta(\varphi)\eta'(\varphi)\Big|_0^{2\pi}\}\equiv 0$$

і тому диференціальний оператор $D^{(2)}$ *симетричний* (*самоспряжений*) в $\text{☺}_{\Pi}^{(2)}(\Omega,\, c)$. Окрім цього, так як $\zeta\,(\alpha)\equiv 0$ є *єдина* за висновком теореми 2.1 припустима функція така, що $\zeta'(\alpha)\equiv 0$, то при $\zeta\,(\alpha)\ne 0$, як стверджується в тій же теоремі, буде $(\zeta,\, D^{(2)}\zeta)>0$. Отже, оператор $D^{(2)}$ *додатний*. Визначимо його власні числа і власні функції.

Теорема 2.7. *Послідовності*

$$1,\quad 1+q^2,\quad 1+q^2,\quad \ldots, 1+q^2n^2,\quad 1+q^2n^2,\ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi,\ldots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\varphi,\ldots,$$

утворюють повну систему власних чисел і відповідних їм власних функцій неперервного симетричного диференціального оператора $D^{(2)}=D^*D$ в $\text{☺}_{\Pi}^{(2)}(\Omega,\, c)$.

Доведення. Власні функції і власні значення $D^{(2)}$ визначаються наступною граничною задачею

$$-q^2\frac{\partial^2 u(\varphi)}{\partial\varphi^2}+u(\varphi)=\lambda\, u(\varphi),\qquad u(0)=u(2\pi),\;\; u'(0)=u'(2\pi),$$

в якій граничні умови задаються природними обмеженнями на контури збурюючих тіл. Перетворене рівняння

$$\frac{\partial^2 u(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\beta^2\, u(\varphi)=0,\qquad \beta^2=\frac{\lambda-1}{q^2},$$

має такий загальний розв'язок

$$u(\varphi)=a\sin\beta\,\varphi+b\cos\beta\,\varphi,\quad a, b-const.$$

З першої граничної умови знаходимо, що $a=0$ і $\cos\beta 2\pi=1$. Отже, послідовність $\{\lambda_n\}_0^\infty$ власних чисел визначається у вигляді $\lambda_n=1+q^2n^2$, а послідовність $\{x^{(n)}\}_0^\infty$ власних

функцій, що їм відповідає, — у вигляді $\{b\cos n\varphi\}_0^\infty$. З другої граничної умови одержуємо $b=0$ і $\cos\beta 2\pi = 1$, тобто ту ж послідовність власних чисел $\lambda_n = 1+q^2n^2$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$, яким тепер відповідає послідовність $\{a\sin\beta\varphi\}_0^\infty$ власних функцій. Позначаючи $x^{(2n)}(\varphi) = b\cos n\varphi$, $x^{(2n+1)}(\varphi) = a\sin n\varphi$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$, і вводячи нормування власних функцій, щоб виконувалася рівність

$$(\bar{x}^{(n)}, \bar{x}^{(m)}) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

завершимо доведення.

Згадуючи пункт 2.2, переконуємось, що власні функції $\{\bar{x}^{(n)}\}_0^\infty$ диференціального оператора $D^{(2)}$ *збігаються* з власними функціями інтегрального оператора A задачі відновлення фінітної області. А цю властивість уже можна ефективно використати при конструюванні алгоритмів чисельного розв'язку задачі відновлення збурюючої області.

Розглянемо тепер необхідні характеристики оператора D над ☺$^{(1)}_{\Pi}(\Omega_C, c)$. Ясно, що диференціальний оператор D лінійний в ☺$^{(1)}_{\Pi}(\Omega_C, c)$. Якщо $\eta(\varphi)$ і $\zeta(\varphi)$ суть припустимі функції, то

$$(\eta, D\zeta) - (\zeta, D\eta) = q\{\eta(\varphi)\zeta(\varphi)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\eta'(\varphi)\zeta(\varphi)d\varphi\} = -2q\int_0^{2\pi}\eta'(\varphi)\zeta(\varphi)d\varphi \neq 0$$

і тому оператор D не є ні додатним, ні самоспряженим в ☺$^{(1)}_{\Pi}(\Omega_C, c)$ і його спектральні характеристики відрізнятимуться від аналогічних характеристик оператора $D^{(2)}$.

Теорема 2.8. *Послідовності* $\{1 - iqn\}_0^\infty$ *й* $\{1/\sqrt{2\pi}\, e^{-in\varphi}\}_0^\infty$ *утворюють у комплексному гільбертовому просторі* ☹$^{(2)}[0, 2\pi]$ *повну систему власних чисел і відповідних їм власних функцій неперервного в* ☺$^{(1)}_{\Pi}(\Omega_C, c)$ *лінійного диференціального оператора* D*, а послідовності* $\{1 + iqn\}_0^\infty$ *й* $\{1/\sqrt{2\pi}\, e^{in\varphi}\}_0^\infty$ *утворюють у спряженому (співпадаючому з вихідним) гільбертовому просторі повну систему власних чисел і власних функцій спряженого оператора* D^*.

Для того щоб переконатися в справедливості сформульованого твердження досить визначити власні числа і відповідні їм власні функції оператора D (чи D^*) як числа λ, так і періодичні розв'язки наступної граничної задачі

$$u(\varphi) + q\frac{\partial u(\varphi)}{\partial\varphi} = \lambda\, u(\varphi), \qquad u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi).$$

Повертаючись до пошуку нормального розв'язку ζ_H інтегрального рівняння $A\zeta = v$ з компактним оператором A у вигляді границі мінімізуючої послідовності $\{\zeta^{(n)}\}$ функціоналу $F(\zeta)$ (чи $F_C(\zeta)$) на ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$, звернемо особливу увагу на наступні обставини. Множини Лебега ☹$(\Phi, d) \subset$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$, обумовлені опуклими функціоналами $\Phi = F$ при досить малому $d = \varepsilon^2$ чи $\Phi = F_C$ при досить великому $d > 0$, відповідно до теореми 2.4 є банаховими просторами, що містять класи припустимих нормальних розв'язків рівняння (2.4). Однак мінімізуючі послідовності функціоналів $F(\zeta)$ і $F_C(\zeta)$ на цих множинах можуть не збігатися до точного розв'язку $\zeta_H(\alpha) \in$ ✞$^{(1)}(A^*)$. Вибір серед них таких, котрі збігаються до множини єдиності розв'язків рівняння (2.4) ✞$^{(1)}_*\subset$ ✞$^{(1)}(A^*)$, можна здійснити за ознаками існування і стійкості однозначних розв'язків, встановлених теоремами 2.2 і 2.3. Реалізація вибору зв'язується з побудовою на ☹(Φ, d) непорожніх (за висновком теореми 2.6) компактних множин ☺$^{(1)}_{\Pi}(\Psi, c)$ за допомогою функціоналів $\Omega(\zeta)$ і $\Omega_C(\zeta)$, що відбивають характеристичні властивості нормальних розв'язків. У зв'язку з цим розв'язок $\zeta_H(\alpha)$ рівняння (2.4) може бути

знайдений в компактній множині

$$☺_{\Pi}^{(1)}(\Phi,\,\Psi;\,c,\,d)=\{\zeta(\alpha)\colon \zeta\in ☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)\bigcap ☹(\Phi,\,d);\;\Phi(\zeta)<d,\;\Psi(\zeta)<c\}$$

припустимих функцій. Замикання множини випливає з неперервності стабілізаторів $\Psi=\Omega,\,\Omega_C$ (теорема 2.6). Окрім того, замість пошуку мінімуму стабілізатора $\Psi(\zeta)$ на множині $☺_{\Pi}^{(1)}(\Phi,\,\Psi;\,c,\,d)$ задачу визначення нормального розв'язку рівняння (2.4) можна звести, відправляючись від теореми [78], до задачі мінімізації стабілізуючого функціонала $\Psi(\zeta)$ на множині $☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)\subset ☹^{(2)}(0,\,2\pi)$ за умови, що гранична функція $\zeta^{(\varepsilon)}(\alpha)$ мінімізуючої послідовності задовільняє рівність $\left\| A\zeta^{(\varepsilon)}-v\right\|=\varepsilon$, де $\varepsilon>0$, якщо $v\neq u=P_{✞(A)}v$ і ё$\varepsilon=0$, якщо $v=P_{✞(A)}v$. Це типова класична задача варіаційного числення на умовний екстремум і розв'язується вона простіше за все методом невизначених множників Лагранжа. Складається лагранжіан — згладжуючий функціонал Тихонова

$$\mathrm{T}(\zeta;\,\alpha)=\Phi(\zeta)+\alpha\,\Psi(\zeta)$$

і відшукується на $☹^{(2)}(0,\,2\pi)$ такий елемент $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$, на якому функціонал $\mathrm{T}(\zeta;\,\alpha)$ досягає своєї точної нижньої грані $\mathrm{T}(\zeta^{(\alpha_0)};\,\alpha_0)$ з параметром регуляризації α_0, що визначається з умови

$$\left\| A\zeta^{(\alpha_0)}-v\right\|_{☹^{(2)}(0,\,2\pi)}=\varepsilon\,. \qquad (2.17)$$

На питання про те, існує чи ні визначена параметром α_0 функція $\zeta^{(\alpha_0)}(\varphi)$ з множини $☺_{\Pi}^{(1)}(F_C,\,\Psi;\,c,\,d)$ така, що кожний з функціоналів

$$\mathrm{T}_{CC}(\zeta;\,\alpha)=F_C(\zeta)+\alpha\,\Omega_C(\zeta)\,,\qquad \mathrm{T}_{CO}(\zeta;\,\alpha)=F_C(\zeta)+\alpha\,\Omega(\zeta) \qquad (2.18)$$

приймає на ній мінімальне значення, а нев'язка рівняння $A\zeta=v$ досягає величини (2.17), дає відповідь

Теорема 2.9 (існування регуляризованого розв'язку). *Якщо $\zeta_H(\varphi)$ нормальний розв'язок інтегрального рівняння $A\zeta=v$ з лінійним невід'ємним компактним оператором $A\geq 0$ у $☹^{(2)}(0,\,2\pi)$, то для всякої функції $v(\varphi)$ з $☹^{(2)}(0,\,2\pi)$ і будь-якого числа $\alpha>0$ існує єдина неперервна функція $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$ з регулярною на $[0,\,2\pi]$ похідною $\dfrac{\partial\zeta^{(\alpha)}(\varphi)}{\partial\varphi}$ для $\Psi=\Omega_C$ чи з похідною, що інтегрується в квадраті на $[0,\,2\pi]$, для $\Psi=\Omega$, на якій згладжуючий функціонал Тихонова*

$$T(\zeta;\,\alpha)=F_C(\zeta)+\alpha\,\Psi(\zeta)$$

досягає своєї нижньої грані на $☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)$ за досить великого $c=2\alpha^{-2}\|v\|^{2}$, а сімейство функцій $\{\zeta^{(\alpha)}(\varphi)\}$ із $☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)$ для $0<\alpha\leq\alpha_0$ збігається рівномірно за метрикою, індукованою стабілізаторами $\Psi=\Omega_C$ чи $\Psi=\Omega$, до нормального (точного) розв'язку при $\alpha\to 0$.

Доведення. Згладжуючий функціонал Тихонова відповідно до тверджень теорем 2.5 і 2.6 є сильно опуклим диференційованим класу $C^{(2)}(☺_{\Pi}^{(1)})$ функціоналом на опуклій компактній множині $☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)$ і тому для будь-яких елементів $v\in ☹^{(2)}(0,\,2\pi)$ і числа $\alpha>0$ *існують його точна нижня грань* і мінімізуюча *послідовність* $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$ функцій з $☺_{\Pi}^{(1)}(\Psi,\,c)$ така, що

$$\lim_{n\to\infty}T^{(\alpha,\,n)}=\lim_{n\to\infty}T(\zeta_n^{(\alpha)},\,v_n;\,\alpha)=T^{(\alpha)}.$$

Дійсно, умова мінімуму для першої з двох модифікацій (2.18) функціонала Тихонова має вигляд

$$(A+\alpha\,E)\zeta^{(\alpha)}=v,\qquad \zeta^{(\alpha)}(\varphi)\Big|_0^{2\pi}=0, \qquad (2.19)$$

а для другої —

$$(A+\alpha D^{(2)})\zeta^{(\alpha)} = v, \qquad \zeta^{(\alpha)},\ \left.\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \varphi}\right|_0^{2\pi} = 0. \tag{2.20}$$

Оператори кожного з цих рівнянь Ейлера строго додатні при $\alpha > 0$, тому що $T''_{CC}(\zeta^{(\alpha)}, v; \alpha) > 0$ і $T''_{CO}(\zeta^{(\alpha)}, v; \alpha) > 0$, і у згоді з альтернативою Фредгольма кожне з рівнянь має *єдиний* розв'язок $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$ за фіксованого $\alpha > 0$ і за будь-якої правої частини $v(\varphi)$ з $L^{(2)}(0, 2\pi)$, в тому числі такої, що задовільняє точному розв'язку задачі.

Існування мінімізуючої послідовності обґрунтовується в такий спосіб. Нехай $\{v_n(\varphi)\}$ — послідовність функцій з $L^{(2)}(0, 2\pi)$ така, що послідовність $\{\varepsilon_n\}$ чисел $\varepsilon_n = \| v_n - u \|$, $u = P_{R(A)} v$, збігається до нуля при $n \to \infty$. Тоді із-за неперервності і сильної опуклості функціонала $T(\zeta, v; \alpha)$ послідовність $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$ розв'язків $\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)$ послідовності рівнянь Ейлера $T'(\zeta, v_n; \alpha) = 0$ буде, очевидно, мінімізуючою. До того ж можна вважати, не обмежуючи узагальнення розгляду і посилаючись на опуклість функціонала, що для кожного $n \ge 1$ буде справедливим наступний ланцюжок нерівностей

$$T^{(\alpha)} \le \ldots \le T^{(\alpha, n)} \le T^{(\alpha, n-1)} \le \ldots \le T^{(\alpha, 1)}.$$

А на підставі залежностей (2.19) і (2.20) матимемо

$$T_{CC}^{(\alpha, n)} = -(v_n, (A+\alpha E)^{-1} v_n) < 0, \qquad T_{CO}^{(\alpha, n)} = -(v_n, (A+\alpha D^{(2)})^{-1} v_n) < 0,$$

тому для будь-якого $n \ge 1$ і довільно фіксованого $\alpha > 0$ виконуватимуться нерівності

$$\Omega_C(\zeta_n^{(\alpha)}) < 2\alpha^{-2}\|v\|^2, \quad \Omega(\zeta_n^{(\alpha)}) < 2\alpha^{-2}\|v\|^2.$$

З цих оцінок випливає, що кожна з послідовностей $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$ функцій $\zeta_n^{(\alpha)} = (A+\alpha E)^{-1} v_n$ чи $\zeta_n^{(\alpha)} = (A+\alpha D^* D)^{-1} v_n$ належить відповідно до множини $M_{\Pi}^{(1)}(\Omega_C, c)$ чи $M_{\Pi}^{(1)}(\Omega, c)$ рівномірно обмежених в середньому і одностайно неперервних функцій, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \zeta_n^{(\alpha)} - \zeta^{(\alpha)} \right\|_{L^{(2)}(0, 2\pi)} = 0.$$

Переконаємось тепер, що ці послідовності функцій *фундаментальні* за метрикою, індукованою стабілізаторами $\Omega_C(\zeta)$ чи $\Omega(\zeta)$, тобто в просторі Соболєва $W_2^{(1)}(0, 2\pi)$. Зосередимося спочатку на мінімізуючій послідовності функціонала $T_{CC}(\zeta, v; \alpha)$. Так як для будь-яких цілих індексів $i,\ j = i + k \ge 1$ з урахуванням рівності (2.11) можемо записати

$$\Omega_C(\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)}) = \left\| \zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)} \right\|^2,$$

то

$$\left| (\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)}, D(\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)})) \right| = \left\| (A+\alpha E)^{-1}(v_i - v_j) \right\|^2 \le \alpha^{-2}(\varepsilon_i + \varepsilon_j)^2 \le \frac{4}{\alpha^2}\varepsilon_i^2,$$

тому що за визначенням $\varepsilon_j \le \varepsilon_i$. Звідси при $\varepsilon_i \to 0$ видна фундаментальність послідовності $\{\zeta_i^{(\alpha)}(\varphi)\}$ *функцій* $\zeta_i^{(\alpha)}(\varphi)$ і їх *похідних* $\{D\zeta_i^{(\alpha)}(\varphi)\}$ у сенсі *слабкої* збіжності в $W_2^{(1)}(0, 2\pi)$ і існування *слабких границь* функції $\tilde{\zeta}^{(\alpha)}(\varphi)$ і її похідної в силу повноти $W_2^{(1)}(0, 2\pi)$ як гільбертового простору. Так само і для мінімізуючої функціонал $T_{CO}(\zeta, v, \alpha)$ послідовності $\{\zeta_i^{(\alpha)}(\varphi)\}$ визначаємо

$$\Omega(\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)}) = \left\| \zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)} \right\|^2_{W_2^{(1)}(0, 2\pi)},$$

$$(\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)}, D^* D(\zeta_i^{(\alpha)} - \zeta_j^{(\alpha)})) \le \alpha^{-2}(\varepsilon_i + \varepsilon_j)^2 \le \frac{4}{\alpha^2}\varepsilon_i^2.$$

та переконуємося, що послідовність $\{\zeta_i^{(\alpha)}(\varphi)\}$ функцій $\zeta_i^{(\alpha)} = (A+\alpha D^* D)^{-1} v_i$ при $\varepsilon_i \to 0$ *фундаментальна* в $W_2^{(1)}(0, 2\pi)$ і тому *сильно збігається* до граничної функції

$\tilde{\zeta}^{(\alpha)} \in$ ⌖$_2^{(1)}(0, 2\pi)$. За побудовою кожна з мінімізуючих функціонали $F_{CC}(\zeta, v, \alpha)$ і $F_{CO}(\zeta, v, \alpha)$ послідовностей $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$ крім того рівномірно збігається за метрикою ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ до екстремалі $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$. А тому що ⌖$_2^{(1)}(0, 2\pi) \subset$ ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ і екстремаль кожного з функціоналів $F_{CC}(\zeta, v, \alpha)$ чи $F_{CO}(\zeta, v, \alpha)$ *єдина*, то $\tilde{\zeta}^{(\alpha)}(\varphi) \equiv \zeta^{(\alpha)}(\varphi) \in$ ☺$_{\Pi}^{(1)}(\Psi, c)$.

Для завершення доведення теореми залишається показати, що кожен з операторів

$$A^{+}(v, \alpha) = (A + \alpha E)^{-1} v \quad \text{чи} \quad A^{+}(v, \alpha) = (A + \alpha D^{*} D)^{-1} v$$

зі значеннями в ⌖$_2^{(1)}(0, 2\pi)$ є *регуляризуючим* для рівняння $A\zeta = v$, або що регуляризовані розв'язки $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$ за досить малих $\alpha > 0$ добре апроксимують нормальний розв'язок даного рівняння.

З попередніх міркувань ясно, що

$$\Omega_C(\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H) = (\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H, D(\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H)) \le \frac{\varepsilon_n^2}{\alpha^2},$$

$$\Omega(\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H) = (D(\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H), D(\zeta_n^{(\alpha)} - \zeta_H)) \le \frac{\varepsilon_n^2}{\alpha^2}. \tag{2.21}$$

Наступні висновки щодо цих нерівностей істотно спираються на таке твердження

Лема 2.2. *Якщо функціонал $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, визначається на множині ☹$(\sqrt{F}, \varepsilon_0) = \{v : \|v - u\| \le \varepsilon_0,\ u = P_{⌖(A)} v\}$, елементів $v(\varphi)$ з ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ нев'язкою $\varepsilon = \|v - A\zeta^{(\alpha)}\|$ лінійного інтегрального рівняння $A\zeta = v$ з невід'ємним компактним оператором, то його нижня і верхня грані на ☹$(\sqrt{F}, \varepsilon_0)$ оцінюються відповідно залежностями*

$$\alpha_H(\varepsilon) = \left(\frac{3\varepsilon^2}{2a^2}\right)^{1/3}, \qquad \alpha_B(\varepsilon) = b^2 e^{\frac{\varepsilon^2}{2\|v\|^2}},$$

де $a^2 \le (A\dfrac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha})$ і b^2 — додатні числа.

З умови леми випливає, що $\varepsilon^2 = (v - A\zeta^{(\alpha)}, v - A\zeta^{(\alpha)}) = \varphi(\alpha)$, де $\zeta^{(\alpha)}(\varphi)$ — екстремаль функціонала $T(\zeta, v; \alpha)$ на ☺$_{\Pi}^{(1)}(\Psi, c)$. Звідси визначаємо диференціальне рівняння

$$2\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha, \tag{2.22}$$

у якому

$$\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = -2(A\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, v - A\zeta^{(\alpha)}).$$

Посилаючись на визначення (2.19) і (2.20), цю похідну можемо переписати у вигляді

$$\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = 2\alpha(A\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, (A + \alpha E)\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}) \ge 0, \tag{2.23}$$

звідки переконуємось, що існує таке додатне число a^2, яке задовільняє умові

$$a^2 \le (A\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}).$$

З урахуванням цього зауваження на підставі залежностей (2.22) і (2.23) після нескладних обчислень знаходимо нижню оцінку для функціонала $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, на множині ☹$(\sqrt{F}, \varepsilon_0)$. Якщо ж вираз (2.22) подати в такий спосіб

$$\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = 2\alpha\left\{\left((A + \alpha E)\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, (A + \alpha E)\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha})\right) - \alpha\left(\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}, (A + \alpha E)\frac{\partial \zeta^{(\alpha)}}{\partial \alpha}\right)\right\}$$

і оцінити його зверху, то прийдемо до визначення $\alpha_B(\varepsilon)$. Отже, функціонал $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ на множині $☹(\sqrt{F},\, \varepsilon_0)$ є *монотонно зростаючою* функцією, *неперервною* на відрізку $[0,\, \varepsilon_0]$ і такою, що $\alpha(0)=0$.

Повертаючись тепер до визначень (2.21) і приймаючи в них для оцінки параметра α границю α_H, установлюємо, що

$$\left|(\zeta_n^{(\alpha)}-\zeta_H,\, D(\zeta_n^{(\alpha)}-\zeta_H))\right|\le\left(\frac{2a^2}{3}\right)^{2/3}\varepsilon_n^{2/3}\to 0,$$

$$\left\|\zeta_n^{(\alpha)}-\zeta_H\right\|^2_{⌖_2^{(1)}(0,\,2\pi)}\le\left(\frac{2a^2}{3}\right)^{2/3}\varepsilon_n^{2/3}\to 0$$

при $\|v_n-u\|=\varepsilon_n\to 0$. Виходить, послідовність $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$ досить добре апроксимує нормальний розв'язок $\zeta_H(\varphi)$ при $\alpha\in[0,\, \alpha_0]$, де $\alpha_0=\alpha(\varepsilon_0)$. При цьому *кожне* сімейство функцій $\{\zeta_n^{(\alpha)}(\varphi)\}$, що відповідає *будь-якій* послідовності $\{\varepsilon_n\}$, що прямує до нуля, збігається при $\alpha\to 0$ у випадку $\Psi=\Omega_C$ *слабо,* а у випадку $\Psi=\Omega$ — *сильно* до функції $\zeta_H(\varphi)$, що має узагальнену похідну, за метрикою простору $⌖_2^{(1)}(0,2\pi)$. А так як відображення $A\colon 😐_\Pi^{(1)}(\Psi,c)\to ✞^{(1)}(A)\subset ☹^{(2)}(0,2\pi)$ *неперервне*, нормальний розв'язок $\zeta_H(\varphi)$ рівняння $A\zeta=v$ за теоремою Новікова [42] *єдиний* для всякого $v\in ✞^{(1)}(A)$ і множина $😐_\Pi^{(1)}(\Psi,\, c)$ *компактна* в $☹^{(2)}(0,2\pi)$ для досить великого $c>0$, то відповідно до теореми Тихонова [62] *обернене відображення* $✞^{(1)}(A)\to 😐_\Pi^{(1)}(\Psi,\, c)$ також *неперервне.* Це в свою чергу означає, що для кожного $\delta>0$ знайдеться таке $\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$, що з нерівності $\|v-u\|\le\varepsilon(\delta)$, $v,\, u\in ✞^{(1)}(A)$ буде випливати нерівність $\|\zeta_v-\zeta_u\|\le\delta$, якщо $v=A\zeta_v$, $u=A\zeta_u$. Теорема повністю доведена.

2.5. Регуляризуючі алгоритми. Задача визначення границі тіла ☟ , близького до кола ☟$_0$ радіуса ρ, зведена до побудови послідовності $\{\zeta_n(\alpha)\}$ наближень $\zeta_n(\alpha)$ границі $\zeta(\alpha)=\rho(\alpha)-\rho$ у вигляді розв'язків послідовності лінійних інтегральних рівнянь першого роду (2.3), де $u(\varphi, r)$ — поле на колі ∂☺$_r : x^2+y^2=r^2$ радіуса $r>\rho$, а $f(\alpha-\varphi, \zeta_{n-1}; \rho, r)$ — функція, визначена рівністю (2.2). Точний розв'язок $\zeta_n^{(T)}(\varphi)$ кожного рівняння послідовності (2.3) при точно заданій правій частині $v_T^{(m)}(\varphi)$ можна шукати у вигляді розгортання за власними функціями оператора задачі з ядром $k(\alpha, \varphi; v)$, тобто, у вигляді

$$\zeta_n^{(T)}(\varphi)=\alpha_0^{(n,\,T)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n,\,T)}\cos k\varphi+\beta_k^{(n,\,T)}\sin k\varphi,$$

оскільки власні функції оператора задачі утворюють базиси в підпросторах ✞(A^*) і ✞(A) гільбертового простору ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$. Розкладаючи в цьому базисі $v_T^{(n)}(\varphi)\in$ ✞(A) в абсолютно збіжний ряд

$$v_T^{(n)}(\varphi)=a_0^{(n,T)}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(n,T)}\cos k\varphi+b_k^{(n,T)}\sin k\varphi \qquad (2.24)$$

одержимо

$$\alpha_0^{(n,\,T)}=\frac{a_0^{(n,\,T)}}{2\pi(-\ln r)},\quad \alpha_k^{(n,\,T)}=\frac{k\,a^{(n,\,T)}}{\pi v^k},\quad \beta_k^{(n,\,T)}=\frac{k\,b^{(n,\,T)}}{\pi v^k}.$$

Ясно, що цей розв'язок в умовах, коли функція $v^{(n)}(\varphi)$ задається з похибками, практично використовувати не можна через сильну нестійкість підсумовування рядів Фур'є з приблизно заданими коефіцієнтами.

Приступаючи до реалізації розв'язку задачі (2.3) у виді пошуку послідовності $\{\zeta_n(\varphi)\}$ границь $\zeta_n(\varphi)$ кожної з мінімізуючих послідовностей $\{\zeta_{mn}(\varphi)\}$ згладжуючого функціонала $T^{(n)}(\zeta; \alpha)$ для n-го інтегрального рівняння послідовності (2.3), перш за все відзначимо, що в зв'язку з завданням замість точного значення потенціалу $u(\varphi, r)$ на колі ∂☺$_r$ наближення $u_N(\varphi)=u_N(\varphi, r)$ і відповідного йому наближення правої частини $v_N^{(n)}(\varphi)$ рівняння у вигляді відрізку ряду (2.24)

$$v_N^{(n)}(\varphi)=a_0^{(n)}+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(n)}\cos k\varphi+b_k^{(n)}\sin k\varphi,$$

кожне з наближень $\zeta_{mn}(\varphi)$ мінімізуючої послідовності функціонала $T^{(n)}(\zeta; \alpha_m)$ будемо відшукувати у вигляді

$$\zeta_{mn}(\varphi)=\alpha_0^{(m,\,n)}+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(m,\,n)}\cos k\varphi+\beta_k^{(m,\,n)}\sin k\varphi.$$

Це забезпечить *абсолютну точність* визначення згладжуючого функціонала на даному елементі, оскільки система $\{\cos k\varphi, \sin k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ є власними функціями не тільки інтегрального оператора задачі, але і диференціального оператора, за допомогою якого з ☹$^{(2)}(0, 2\pi)$ відокремлюється *підмножина* ✞$^{(1)}(A^*)$ коректності для кожного інтегрального рівняння типу (2.4).

З умов мінімуму на множинах ☺$_{\Pi}^{(1)}(\Psi, c)$ і відповідно до напрямку $\{\alpha_m\}$ для кожного з функціоналів

$$\begin{aligned} T_{CC}^{(n)}(\zeta; \alpha_m)&=T_{CC}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)=(\zeta_n,\, A\zeta_n-2v^{(n)})+\alpha_m(\zeta_n,\, D\zeta_n),\\ T_{CO}^{(n)}(\zeta; \alpha_m)&=T_{CC}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)=(\zeta_n,\, A\zeta_n-2v^{(n)})+\alpha_m(D\zeta_n,\, D\zeta_n),\\ T_{OO}^{(n)}(\zeta; \alpha_m)&=T_{OO}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)=\| A\zeta_n-v_n\|^2+\alpha_m(D\zeta_n,\, D\zeta_n) \end{aligned} \qquad (2.25)$$

одержуємо

$$\alpha_0^{(m,n)} = \frac{a_0^{(n)}}{2\pi(-\ln r)+\alpha_m}, \qquad \alpha_k^{(m,n)} = \frac{ka_k^{(n)}}{\pi v^k + \alpha_m k}, \qquad \beta_k^{(m)} = \frac{kb_k}{\pi v^k + \alpha_m k}$$

для функціонала $\mathrm{T}_{CC}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)$;

$$\alpha_0^{(m,n)} = \frac{a_0^{(n)}}{2\pi(-\ln r)+\alpha_m}, \qquad \alpha_k^{(m,n)} = \frac{ka_k^{(n)}}{\pi v^k + \alpha_m k(1+q^2k^2)}, \quad \beta_k^{(m,n)} = \frac{kb_k^{(n)}}{\pi v^k + \alpha_m k(1+q^2k^2)},$$

для функціонала $\mathrm{T}_{CO}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)$; і, нарешті,

$$\alpha_0^{(m,n)} = \frac{2\pi(-\ln r)a_0^{(n)}}{[2\pi(-\ln r)]^2+\alpha_m}, \ \alpha_k^{(m,n)} = \frac{\pi v k a_k^{(n)}}{(\pi v^k)^2 + \alpha_m k^2(1+q^2k^2)}, \ \beta_k^{(m,n)} = \frac{\pi v k b_k^{(n)}}{(\pi v^k)^2 + \alpha_m k^2(1+q^2k^2)}$$

для функціонала $\mathrm{T}_{OO}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)$. В усіх трьох випадках регуляризовані коефіцієнти розкладання $\zeta_{mn}(\varphi)$ при $\alpha_m = 0$ тотожно дорівнюють абсолютно точним коефіцієнтам (2.24). У той же час складність обчислення регуляризованих значень коефіцієнтів зростає в напрямку визначень від функціонала $\mathrm{T}_{CC}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)$ до функціонала $\mathrm{T}_{OO}(\zeta_n, v^{(n)}; \alpha_m)$. У тому же напрямку через округлення зменшується точність обчислення коефіцієнтів.

Оптимальні значення коефіцієнтів Фур'є знаходяться методом нев'язки. Задається спадаюча послідовність $\{\alpha_m\}$ значень параметра регуляризації, наприклад, у виді спадаючої геометричної прогресії і за допомогою методу дихотомії відшукується таке значення параметра $\alpha = \alpha_{m_0}$, що задовільняє (наближеній) рівності

$$\left\| A\zeta_n(\alpha_{m_0}) - v^{(n)} \right\| = \varepsilon,$$

де ε — середня квадратична міра похибок.

Якщо оптимальні коефіцієнти знайдені, тоді складається наближення $\zeta_n(\varphi)$ у вигляді відрізку ряду Фур'є й обчислюється наближення функції

$$\Phi^{(n)}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, \varphi, \zeta_n; \rho, r)\, d\alpha,$$

що визначає наближення потенціалу $\delta u(\varphi, r)$ «надлишкового» тіла Δ👎 $=$ 👎 $\setminus$ 👎$_0$, і знаходиться величина відхилення

$$\Delta\Phi^{(n)} = \left\| \Phi^{(n)}(\varphi) - \rho v^{(1)}(\varphi) \right\|.$$

Якщо $\Delta\Phi^{(n)} \le \varepsilon$, то n-е наближення $\zeta_n(\varphi)$ границі $\zeta(\varphi)$ приймається як остаточний розв'язок задачі; якщо ж $\Delta\Phi^{(n)} > \varepsilon$, то здійснюється перехід до обчислення $n+1$-го наближення $\zeta_{n+1}(\varphi)$ границі тіла Δ👎 за наведеною схемою обчислення n-го наближення $\zeta_n(\varphi)$ тощо. У зв'язку з пошуком наближення $\zeta_n(\varphi)$ ще раз підкреслимо, що спроби визначити його на відміну від побудови мінімізуючих послідовностей функціоналів типу (2.25) за допомогою мінімізації функціоналів нев'язки з додатковою вимогою *мінімальності норми розв'язку практично приречені на невдачу*, тому що ці вимоги не обмежують рамки пошуку розв'язків на компактах ✞$^{(1)}(A^*)$.

Висновки. Виведено нелінійне інтегральне рівняння з цілком неперервним (компактним) оператором, що визначає за значеннями потенціалу відхилення контуру збурюючого тіла від заданого. Для пошуку розв'язку рівняння в припущенні, що відхилення невеликі, запропоновано ітераційний процес, на кожному кроці якого наближення відхилення обчислюється у вигляді розв'язку лінійного інтегрального рівняння з симетричним невід'ємним компактним оператором.

Доведено локальну теорему існування і теорему стійкості розв'язку задачі. Вказано магістральний напрямок пошуку нормального розв'язку задачі.

Розроблено ефективний метод розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, що описують відхилення контурів зіркових збурюючих областей від заданих. Глобальний регуляризуючий оператор для нелінійного рівняння відшукується у вигляді послідовності локальних для відповідних лінійних інтегральних рівнянь.

3. ПРО ПРОЦЕСИ ДООРТОГОНАЛІЗАЦІЇ ДЕЯКИХ СІМЕЙ ВЕКТОРІВ

Вступ. Основні задачі, які визначили в кінцевому рахунку розвиток класичної лінійної алгебри, пов'язані з визначенням власних значень і відповідних їм власних векторів деяких матриць n - го порядку, а також з розв'язком систем лінійних рівнянь. Нагадаємо, що власними значеннями (або числами), матриці n - го порядку називають [8, 37, 68, 69] корені її характеристичного полінома $p_n(\lambda)$ n - го степеня, тобто корені рівняння

$$p_n(\lambda) = \det(A - \lambda E^{(n)}) = \left|A - \lambda E^{(n)}\right| =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \qquad (3.1)$$
$$= (-1)^n(\lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} - \alpha_2\lambda^{n-2} - \ldots - \alpha_n) = 0,$$

де $E^{(n)} = (\delta_{ij})$ — одинична матриця, діюча в n - мірному просторі $\mathbb{R}^{(n)}$, δ_{ij} — символ Кронекера. Власними векторами $u^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матриці A називають нетривіальні вектори — розв'язки системи n однорідних лінійних рівнянь з n невідомими, тобто розв'язки системи

$$(A - \lambda_i E^{(n)})u^{(i)} = 0, \qquad (3.2)$$

де $u^{(i)} = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ni})^*$ — власний вектор матриці, що належить власному значенню λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а зірочкою позначена (і цього позначення дотримуватимемося надалі) операція транспонування (спряженості) вектора - стовпця (або матриці). Тут же відзначимо, що не для кожної матриці, заданої над полем дійсних чисел, знайдуться n дійсних власних значень λ_i і відповідних їм власних векторів $u^{(i)}$.

Центральною проблемою при визначенні власних чисел є відшукання коефіцієнтів λ_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, характеристичного полінома. Це зумовлено тим, що безпосереднє визначення коефіцієнтів λ_i із співвідношення (3.1) у вигляді сум всіх мінорів i - того порядку визначника матриці, що спираються на головну діагональ, не тільки надзвичайно громіздко, але і вимагає величезного числа операцій особливо при великих розмірах матриці. Остання обставина в свою чергу приводить до відомих труднощів навіть при використанні сучасних комп'ютерів. Тому для знаходження λ_i були створені спеціальні обчислювальні методи, в яких пошук коефіцієнтів λ_i реалізується без стомливих і безперспективних обчислень численних мінорів визначника матриці. Першим серед них був, певно, метод У. Дж. Леверьє (1840), який залишався ще досить трудомістким. Більш витончені і менш трудомісткі методи з'явилися значно пізніше, майже сто років потому. Це — методи А. Н. Крилова (1931), А. М. Данилевського (1937), К. Хессенберга (1941), Д. К. Фаддєєва (1949), К. Ланцоша (1950-1952) та інших.

Обчислювальні аспекти цих і багатьох інших методів глибоко проаналізовані в основоположних творах К. Ланцоша [37], Д. К. Фаддєєва і В. Н. Фаддєєвой [69], Дж. Х. Уілкінсона [68] і В. В. Воєводіна [12]. В цих роботах після детального дослідження впливу помилок заокруглювання проміжних обчислень на точність остаточних результатів сформульовані загальні принципи складання стійких алгоритмів, які реалізовують на ЕОМ

той або інший метод. Однієї з важливих, якщо не найважливішою особливістю таких алгоритмів є врахування того, що арифметичні операції над числами в комп'ютерах (із-за обмеженості діапазону використовуваних чисел і представлення їх кінцевим числом розрядів) не підкоряються звичайним законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності. В цьому плані різні методи визначення коефіцієнтів λ_i характеристичного полінома (3.1) можна класифікувати за оцінками точності λ_i, гарантованими при реалізації їх на тій або іншій ЕОМ. На підставі міркувань, про які мова піде нижче, можна сподіватися, що найточніші оцінки λ_i можуть бути отримані при реалізації методів, заснованих на ортогоналізації цілком визначеної послідовності векторів, тісно пов'язаних з досліджуваною матрицею. Тому серед всіх методів непрямого визначення коефіцієнтів λ_i перевагу потрібно віддати методу мінімальних ітерацій К. Ланцоша і йому спорідненим методам.

А зараз — декілька слів на виправдання зробленого вибору. При реалізації на комп'ютері методу мінімальних ітерацій або будь-якого іншого методу, заснованого на ортогоналізації деякої системи векторів, доводиться обчислювати рекурентно одна з одною зв'язані залежності, в яких в якості коефіцієнтів використовуються значення скалярних добутків векторів. При такому способі підрахунку неминуче накопичення помилок заокруглення, які можуть в значній мірі спотворити остаточний результат. На щастя, використання властивостей ортогоналізації векторів дозволяє виправити отриманий результат. Відзначимо тут же, що подібна ситуація, коли в процесі обчислень вдається знайти "жорсткий репер" (в даному випадку — ортогональність векторів), зустрічається не часто. Принаймні, в методах У. Дж. Леверьє, А. Н. Крилова, А. М. Данилевського, К. Хессенберга, Д. К. Фаддєєва і інших ми їх не знаходимо. В зв'язку з цим слід очікувати, що оцінки λ_i в методах, заснованих на ідеї ортогоналізації, будуть кращими в порівнянні з такими в інших методах.

Ідею відновлення втраченої при обчисленнях точності результату на випадок ортогоналізації векторів запропонував К. Ланцош одночасно з описом методу мінімальних ітерацій [116, 117]. Відповідно до його пропозиції покращення ортогональних властивостей деякої системи векторів, близьких до ортогональних, повинно проводитися в результаті повторної їх ортогоналізації. При цьому поправки, що поліпшують ортогональні властивості векторів, знаходяться з певної системи лінійних рівнянь. Уточнюючі в деяких аспектах ідею К. Ланцоша пропозиції були висловлені в роботах [9, 12, 115]. В статтях [33, 95] ідея К. Ланцоша розвивається з інших позицій, які дозволяють уникнути розв'язку допоміжної системи лінійних рівнянь. При цьому в роботі [95] для випадку ортогоналізації сім'ї векторів методом Грама – Шмідта процес ортогоналізації поданий в замкнутому вигляді. Розвиваючи використовуваний в [95] підхід на інші способи ортогоналізації, супутні різним канонічним зображенням дійсної матриці n - го порядку, ми отримаємо можливість вирішити *задачу: визначити з високою точністю коефіцієнти характеристичного полінома заданої дійсної матриці n - го порядку.*

В свою чергу розв'язок поставленої задачі, як відомо [15, 37, 68, 69], забезпечить надійне обчислення, по-перше, власних чисел матриці, по-друге, її власних векторів і, нарешті, по-третє, (узагальненого, нормального) розв'язку системи лінійних рівнянь з розглядуваною матрицею. Насправді, при побудові анулюючого матрицю полінома методом К. Ланцоша або йому спорідненими на проміжних етапах конструкції ми одержуємо послідовність поліномів Штурму, що дозволяє розділити корені полінома, а для їх наближеного обчислення використовувати або ітераційний метод І. Ньютона, або більш швидко збіжний процес наближень П. Л. Чебишева [8, 37]. Отримавши власні числа і маючи послідовність поліномів Штурма, по відомих співвідношеннях [69] легко відновлюємо власні вектори матриці. Після цього не складає труднощів розв'язати систему лінійних рівнянь з цією матрицею при будь-якій правій частині системи [15, 69].

Перш ніж перейти до детального розгляду сформульованої проблеми відзначимо одну важливу характеристику $c(A)$ матриці A, що відіграє фундаментальну роль в питаннях стійкості розв'язків систем лінійних рівнянь, яку називають мірою (або числом) обумовленості

матриці і визначають співвідношенням

$$c(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

де $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ — деякі норми матриці A і її оберненої A^{-1}, узгоджені з нормою даного векторного простору. Якщо в цьому просторі збурення Δ_b і Δ_A вектора b і матриці A системи

$$Ax = b$$

визначаються відповідно величинами $\|\Delta_b\|$ і $\|\Delta_A\|$, а їх відносні похибки — числами

$$\delta b = \frac{\|\Delta_b\|}{\|b\|}, \qquad \delta A = \frac{\|\Delta_A\|}{\|A\|},$$

то, як відомо [9], відносна похибка розв'язку системи оцінюється нерівністю

$$\delta x = \frac{\|\Delta_x\|}{\|x\|} \le \frac{c(A)}{1 - c(A)\,\delta A}(\delta A + \delta b) \qquad (3.3)$$

Звідси витікає, що відносна похибка розв'язку збуреної системи лінійних рівнянь залежить значною мірою від числа $c(A)$ обумовленості матриці A: з одного боку, чим більше це число відрізняється, скажімо, від одиниці, тим нижче відносна точність розв'язку системи. З другого боку (і на це вказує знаменник в правій частині оцінки (3.3)), чим більше міра обумовленості, тим з більшою відносною точністю повинна бути відома матриця даної системи для забезпечення існування її розв'язку. Таким чином, з погляду стійкості вельми істотно, щоб число обумовленості не було надто великим. Проте з рівності

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E^{(n)}$$

витікає, що незалежно від вибору норми матриці ці числа ніколи не можуть бути занадто малими, принаймні, будь-яке з них (залежно від вибору норми матриці) не може бути менше одиниці. В роботі [95] виділені класи перетворень початкової системи, що не міняють її обумовленості. До їх числа відносяться ортогональні перетворення. Надалі буде показано, що міра обумовленості матриці відіграє істотну роль не тільки в питаннях стійкості розв'язків систем, але і в розв'язку сформульованої проблеми. В світлі останнього зауваження і головним чином того, що клас ортогональних перетворень не змінює міри обумовленості матриці, слід ще раз підкреслити те виняткове положення, яке займають методи, засновані на ортогоналізації деякої системи векторів, серед інших методів непрямого визначення коефіцієнтів характеристичного полінома. В обчислювальному аспекті ці методи виявляються найстійкішими.

3.1. Метод ортогоналізації послідовних ітерацій [69]. Будемо розглядати дійсну матрицю A, діючу в n - мірному евклідовому просторі ☼$^{(n)}$, котра має n різних дійсних значень λ_i і відповідних їм n власних векторів $u^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. У відповідності до теореми Келі - Гамільтона матриця A являється коренем свого характеристичного полінома $p_n(\lambda)$, тобто вона задовольняє рівності

$$p_n(A) = A^n - \alpha_1 A^{n-1} - \alpha_2 A^{n-2} - \ldots - \alpha_n A = 0. \qquad (3.4)$$

Цю чудову рівність А. Н. Крилов використовував при визначенні коефіцієнтів λ_i полінома $p_n(\lambda)$ шляхом попереднього перетворення $p_n(\lambda)$ в йому еквівалентний поліном $\varphi_n(\lambda)$. Перетворення, за допомогою якого з $p_n(\lambda)$ виходить $\varphi_n(\lambda)$, задається в базисі

$$u,\ Au,\ A^2u,\ \ldots,\ A^{n-1}u, \qquad (3.5)$$

де $u \in$ ☼$^{(n)}$ — такий вектор, що його ітерація $A^k u$ матрицею A належить лінійній оболонці ☹$(u, Au, \ldots, A^{k-1}u)$ тільки при $k = n$. Іншими словами, вектор u повинен підбиратися так, щоб система векторів (3.5) була лінійно незалежною. Тут і впритул до п. 3.5 вважатимемо, що вибір вектора u задовольняє поставленим умовам.

Плідна ідея А. Н. Крилова про перетворення $p_n(\lambda)$ в $\varphi_n(\lambda)$ за допомогою базису

(3.5) по суті використовується в усіх методах непрямого визначення λ_i, які таким чином відрізняються один від одного тільки тим, як визначаються компоненти вектора $A^k u$ в цьому базисі. В розглядуваному нижче методі компоненти $A^k u$ в базисі оболонки ☹ $(u, Au, \ldots, A^{k-1}u)$ визначаються в процесі ортогоналізації сім'ї $\{A^{k-1}u\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

На відміну від опису [69] викладемо обчислювальну схему методу для ортонормованої послідовності векторів $u^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В якості початкового вектора ортонормованої системи приймемо

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|}, \qquad u = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n})^*, \qquad \|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{1i}^2}.$$

Нехай перші k ортонормованих векторів $u_1, u_2, \ldots, u_k$ вже побудовані і ☹ $(u_1, Au_1, \ldots, A^{k-1}u_1) =$ ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Тоді вектор u_{k+1} будуватимемо так. Обчислимо ітерацію Au_k вектора u_k матрицею A і розкладемо Au_k на дві складові:

$$u'_{k+1} \perp ☹\,(u_1, u_2, \ldots, u_k), \qquad u''_{k+1} \in ☹\,(u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

а для відшукання цих проекцій складемо лінійну комбінацію

$$u_{k+1} = u'_{k+1} + u''_{k+1} = Au_k - \sum_{i=1}^{k} \beta_{k\,i} u_i. \tag{3.6}$$

Коефіцієнти $\beta_{k\,i}$ — компоненти проекції u'_{k+1} в базисі ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ — знайдемо з умов ортогональності:

$$\beta_{k\,i} = \left(Au_k, u_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$\beta_{k\,k+1} = \|u'_{k+1}\|, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.7}$$

В силу вибору початкового вектора повинно бути

$$\|u'_{k+1}\| > 0$$

для всіх $k = 1, 2, \ldots, n-1$, що дозволяє визначити вектор u_{k+1} у вигляді

$$u_{k+1} = \frac{u'_{k+1}}{\|u'_{k+1}\|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.8}$$

При цьому за побудовою ☹ $(u_1, Au_1, \ldots, A^{k-1}u_1) =$ ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ і, крім того, внаслідок рівності $\|u'_{n+1}\| = 0$, що витікає з (3.4), одержуємо

$$0 = Au_n - \sum_{i=1}^{n} \beta_{n\,i} u_i. \tag{3.9}$$

Для кращого огляду випишемо формули (3.6) і (3.9) більш детально

$$\begin{gathered}
u_1 = u_1 \\
\beta_{12} u_2 = -\beta_{11} u_1 + Au_1 \\
\beta_{23} u_3 = -\beta_{21} u_1 - \beta_{22} u_2 + Au_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{n-1\,n} u_n = -\beta_{n-1\,1} u_1 - \beta_{n-1\,2} u_2 - \ldots - \beta_{n-1\,n-1} u_{n-1} + Au_{n-1} \\
0 = -\beta_{n\,1} u_1 - \beta_{n\,2} u_2 - \ldots - \beta_{n\,n} u_n + Au_n
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Звідси слідує

$$u_{k+1} = \frac{1}{\beta_{k\,k+1}} \varphi_k(A) u_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{3.10 A}$$

де поліноми $\varphi_k(t)$ обчислюються, як це витікає з співвідношень (3.10), по наступних рекурентним формулах:

$$\varphi_0(t) = 1$$

$$\varphi_1(t) = (t-\beta_{11})\frac{1}{\beta_{12}}\varphi_0(t)$$

$$\varphi_2(t) = (t-\beta_{22})\frac{1}{\beta_{23}}\varphi_1(t) - \frac{\beta_{21}}{\beta_{23}}\varphi_0(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.11)$$

$$\varphi_k(t) = (t-\beta_{kk})\frac{1}{\beta_{k\,k+1}}\varphi_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_{ki}}{\beta_{k\,k+1}}\varphi_{i-1}(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(t) = (t-\beta_{nn})\varphi_{n-1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1}\beta_{ni}\varphi_{i-1}(t)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким чином, вирахувавши при вдалому виборі початкового вектора u_1 всі коефіцієнти β_{ki}, $i = 1, 2, \ldots, k+1$; $k = 1, 2, \ldots, n$, по формулам (3.7), ми можемо послідовно знайти всі поліноми $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. У випадку, якщо процес обчислення β_{ki} закінчиться завчасно, тобто коли при $k < n$ виявиться $\beta_{k\,k+1} = 0$, ми отримаємо мінімальний анулюючий вектор u_1 поліном $\varphi_k(t)$.

Легко показати, що $\varphi_n(t)$ з точністю до постійного множника співпадає з характеристичним поліномом $p_n(t)$ матриці A. Замітимо на закінчення, що співвідношення (3.10) можна записати у вигляді

$$AU = UB, \qquad (3.12)$$

де $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$,

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1,1} & \beta_{n-1,2} & \beta_{n-1,3} & \beta_{n-1,4} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \beta_{n4} & \cdots & \beta_{n,n-1} & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Звідси витікає, що матриці A і B подібні, бо

$$A = UBU^{-1} = UBU^*,$$

а це в свою чергу означає, що анулюючі поліноми матриць A і B однакові.

3.2. Метод мінімальних ітерацій К. Ланцоша [8, 69]. Метод мінімальних ітерацій для вирішення проблеми власних значень є не що інше як описаний в попередньому пункті метод ортогоналізації послідовних ітерацій деякого початкового вектора симетричною матрицею.

Отже, якщо A: $\mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(n)}$ — симетрична дійсна матриця, діюча в n - мірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^{(n)}$, а $u = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n})^* \in \mathbb{R}^{(n)}$ — вдало вибраний вектор, то процес ортонормалізації послідовних ітерацій $u_1, Au_1, \ldots, A^k u_1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вектора

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|_{R^{(n)}}}, \qquad \|u\|_{R^{(n)}} = \sqrt{(u, u)}$$

матрицею A здійснюється по трichленним рекурентним формулах

$$\beta_{k\,k+1}u_{k+1} = -\beta_{k\,k-1}u_{k-1} - \beta_{kk}u_k + Au_k, \qquad (3.13)$$

$$k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

а при $k = 1$ і $k = n$ відповідно по формулах

$$\beta_{12} u_2 = -\beta_{11} u_1 + Au_1$$

$$0 = -\beta_{n\,n-1} u_{n-1} - \beta_{n\,n} u_n + Au_n\,, \qquad (3.14)$$

де

$$\beta_{i\,j} = (Au_i\,, u_j) \neq 0 \text{ для } |i-j| \leq 1,$$

$$\beta_{i\,j} = (Au_i\,, u_j) = 0 \text{ для } |i-j| > 1. \qquad (3.15)$$

Насправді, з (3.10) маємо

$$\beta_{j\,j+1} u_{j+1} = -\beta_{j\,1} u_1 - \beta_{j\,2} u_2 - \ldots - \beta_{j\,j} u_j + Au_j$$

$$\beta_{k\,k+1} u_{k+1} = -\beta_{k\,1} u_1 - \beta_{k\,2} u_2 - \ldots - \beta_{k\,k} u_k + Au_k\,. \qquad (3.16)$$

Оскільки одиничні вектори попарно ортогональні, а матриця — симетрична, то з виразів (3.16) отримаємо

$$\beta_{k\,k+1}(u_{k+1}, u_j) = -\beta_{k\,j} + (Au_k, u_j) = -\beta_{k\,j} + (u_k, Au_j) =$$

$$= -\beta_{k\,j} + (u_k\,, \beta_{j\,1} u_1 + \beta_{j\,2} u_2 + \ldots + \beta_{j\,j} u_j + \beta_{j\,j+1} u_{j+1}). \qquad (3.17)$$

А оскільки $u_{k+1} \perp$ ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, то з рівності (3.17) негайно одержуємо

$$\beta_{k\,j} \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-2,$$

$$-\beta_{\mathrm{k\,k-1}} + \beta_{\mathrm{k-1\,k}} = 0, \quad \mathrm{j = k-1}, \qquad (3.18)$$

$$\beta_{k\,k} = (Au_k\,, u_k), \quad j = k.$$

Далі з рівності

$$\beta_{k\,k+1} = \left\| -\sum_{i=1}^{k} \beta_{k\,i} u_i + Au_k \right\|_{R^{(n)}} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

з врахуванням виразів (3.18) знаходимо

$$\beta_{k-1\,k} = \beta_{k\,k-1} = (Au_k\,, u_{r-1}) > 0. \qquad (3.19)$$

Тим самим вирази (3.13) - (3.15) з врахуванням симетричності матриці повністю доведені, так як для будь-яких $i, j = 1, 2, \ldots, n$ мають місце рівності

$$(Au_i\,, u_j) = (u_i\,, Au_j).$$

Отже, ми прийшли до співвідношень

$$\beta_{12} u_2 = -\beta_{11} u_1 + Au_1$$

$$\beta_{23} u_3 = -\beta_{21} u_1 - \beta_{22} u_2 + Au_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.20)$$

$$\beta_{n-1\,n} u_n = -\beta_{n-1\,n-2} u_{n-2} - \beta_{n-1\,n-1} u_{n-1} + Au_{n-1}$$

$$0 = -\beta_{n\,n-1} u_{n-1} - \beta_{n\,n} u_n + Au_n\,,$$

які по аналогії з рівністю (3.12) можна записати більш коротко:

$$AU = UB, \qquad (3.21)$$

де $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$,

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_{n-1,\,n-2} & \beta_{n-1,\,n-1} & \beta_{n-1,\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \beta_{n,\,n-1} & \beta_{n,n} \end{bmatrix}.$$

По побудові очевидно ☹ $(u_1, Au_1, \ldots, A^{n-1}u_1) =$ ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Таким чином, ми переконалися в тому, що якщо симетрична матриця A має попарно різні власні значення, то матриця B буде також симетричною, причому трьохдіагональною з позитивними елементами $\beta_{k\,k-1}$ і $\beta_{k-1\,k}$, $k = 2, 3, \ldots, n,$ розташованими відповідно під і над головною діагоналлю $\beta_{k\,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n.$ Далі, з подібності матриць A і B витікає рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha_1,$$

що можна використовувати як контроль при обчисленнях.

З виразів (3.20) з посиланням на рівність ☹ $(u_1, Au_1, \ldots, A^{n-1}u_1) =$ ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ робимо висновок, що ортонормована послідовність векторів $u_1, u_2, \ldots, u_n$ отримується у вигляді

$$u_{k+1} = \frac{1}{\beta_{k\,k+1}} \varphi_k(A) u_1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.20 A}$$

де

$$\begin{gathered}
\varphi_0(t) = 1 \\
\varphi_1(t) = \frac{1}{\beta_{12}}[(t - \beta_{11})\varphi_0(t)], \\
\varphi_2(t) = \frac{1}{\beta_{23}}[(t - \beta_{22})\varphi_1(t) - \beta_{21}\varphi_0(t)], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(t) = \frac{1}{\beta_{k-1\,k}}[(t - \beta_{k-1\,k-1})\varphi_{k-1}(t) - \beta_{k-1\,k-2}\varphi_{k-2}(t)], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n(t) = (t - \beta_{n\,n})\varphi_{n-1}(t) - \beta_{n\,n-1}\varphi_{n-2}(t), \\
k = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

причому при нормальному перебігу процесу обчислень, коли вдасться обчислити всі вектори лінійної оболонки ☹ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, поліном $\varphi_n(\lambda)$ співпадає з точністю до деякої постійної з характеристичним. Відмітимо, що сім'я поліномів $\varphi_0(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$, ... , $\varphi_n(\lambda)$, обчислювана, як і будь-яка інша сім'я ортогональних (по деякій мірі) поліномів, по тричленним рекурентним співвідношеннях (3.22), утворює в силу додатності коефіцієнтів $\beta_{k-1\,k}$, $\beta_{k\,k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, n,$ послідовність поліномів Штурма.

3.3. Метод A - мінімальних ітерацій [69]. Метод A - мінімальних ітерацій полягає в побудові сукупності A - ортогональних векторів на лінійній оболонці ☹ $(q_1, Aq_1, \ldots, A^k q_1)$, $k = 1, 2, \ldots, n,$ послідовних ітерацій деякого початкового вектора додатньо визначеною матрицею.

З визначення додатньо визначеної матриці слідує, що матриця A невироджена і, отже, для неї існує обернена A^{-1}, яка, очевидно, теж додатньо визначена. З кожною додатньо визначеною матрицею, діючою в евклідовому просторі ☼$^{(n)}$, можна зв'язати скалярний добуток двох векторів $x, y \in$ ☼$^{(n)}$

$$(Ax, y),$$

який на відміну від старого позначатимемо квадратними дужками, вважаючи

$$[x, y] = (Ax, y). \tag{3.23}$$

Легко переконатися, що скалярний добуток (3.23), який часто називатимемо A - скалярним добутком двох векторів $x, y \in$ ☼$^{(n)}$, задовольняє всім аксіомам звичайного скалярного добут-

ку, заданого в $\mathbb{R}^{(n)}$. Скалярний добуток $[x, y]$, також як і (x, y), індукує нову метрику на $\mathbb{R}^{(n)}$, перетворюючи його на деякий новий евклідів простір, який позначатимемо через $\mathbb{R}_A^{(n)}$. Норму елемента x в цьому просторі позначатимемо через $|x|$ і задамо її наступним співвідношенням:

$$|x|^2 = \|x\|^2_{R_A^{(n)}} = [x, x] = (Ax, x), \quad x \in \mathbb{R}^{(n)}. \tag{3.24}$$

Будемо називати її A - нормою.

Спряженими відносно матриці A векторами (або A - ортогональними) назвемо відмінні від нульового вектори $x, y \in \mathbb{R}^{(n)}$, що задовольняють рівності

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0. \tag{3.25}$$

A - ортонормованими називатимемо вектори x_1, y_1 з $\mathbb{R}^{(n)}$, для яких має місце (3.25) за умови, що

$$x_1 = \frac{x}{|x|}, \quad y_1 = \frac{y}{|y|},$$

x, y — відмінні від нульового довільні вектори $\mathbb{R}^{(n)}$.

Після цих зауважень перейдемо до розгляду обчислювальної схеми методу A - мінімальних ітерацій. Як і раніше припускатимемо, що початковий вектор q вибрано вдало для його послідовних ітерацій. Нехай, починаючи з A – одиничного вектора

$$q_1 = \frac{q}{|q|}, \qquad q = (q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1n})^*, \qquad |q| = \sqrt{(Aq, q)},$$

побудуємо по тричленним рекурентним співвідношеннях систему A - ортонормованих векторів таким чином:

$$\begin{gathered} b_{12}q_2 = -b_{11}q_1 + Aq_1, \\ b_{23}q_3 = -b_{21}q_1 - b_{22}q_2 + Aq_2, \\ b_{34}q_4 = -b_{32}q_2 - b_{33}q_3 + Aq_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1n}q_n = -b_{n-1n-2}q_{n-2} - b_{n-1n-1}q_{n-1} + Aq_{n-1}, \\ 0 = -b_{nn-1}q_{n-1} - b_{nn}q_n + Aq_n, \end{gathered} \tag{3.26}$$

що, очевидно, можна переписати у вигляді матричної рівності

$$AQ = QB, \tag{3.27}$$

якщо ввести позначення по аналогії з вище наведеними. А саме, покласти

$$[q_1, q_2, \ldots, q_n] = Q,$$

$$[Aq_1, Aq_2, \ldots, Aq_n] = AQ,$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_{n-1n-2} & \beta_{n-1n-1} & \beta_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \beta_{nn-1} & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Анулюючий матрицю B поліном $\varphi_n(\lambda)$ будується точно так, як і відповідний поліном для симетричної матриці (див. (3.22)), що витікає з співставлення схем (3.20) і (3.26). Тому маємо

$$\varphi_0(t) = 1$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{b_{12}}[(t - b_{11})\varphi_0(t)],$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{b_{23}}[(t - b_{22})\varphi_1(t) - b_{21}\varphi_0(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.28)$$

$$\varphi_{k-1}(t) = \frac{1}{b_{k-1\,k}}[(t - b_{k-1\,k-1})\varphi_{k-2}(t) - b_{k-1\,k-2}\varphi_{n-3}(t)],$$

$$\varphi_n(t) = (t - b_{nn})\varphi_{n-1}(t) - b_{n\,n-1}\varphi_{n-2}(t)\,.$$

Коефіцієнти b_{ij} поліномів $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ в даному випадку обчислюються по-іншому. Втім їх визначення також супроводить побудові сім'ї A - ортонормованих векторів q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, які обчислюються індукцією по k. Припустимо, що перші k векторів лінійної оболонки ☹$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ вже побудовані так, що ☹$(q_1, q_2, \ldots, q_k) =$ ☹$(q_1, Aq_1, \ldots, A^{k-1}q_k)$. Тоді вектор q_{k+1} будуватимемо так. Складемо лінійну комбінацію

$$q'_{k+1} = -b_{k\,k-1}q_{k-1} - b_{k\,k}q_k + Aq_k\,, \qquad (3.29)$$

коефіцієнти $b_{k\,k-1}$, $b_{k\,k}$ якої визначимо з умови A - ортогональності вектора q'_{k+1} з кожним з векторів оболонки ☹$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Для цього помножимо q'_{k+1} на матрицю і запишемо вираз, що витікає з (3.29):

$$(q_j, Aq'_{k+1}) = 0 = -b_{k\,k-1}(q_j, Aq_{k-1}) - b_{k\,k}(q_j, Aq_k) + (q_j, A^2q_k)\,,$$

звідки

$$b_{k\,k-1} = (Aq_k, Aq_{k-1}), \quad k = 2, 3, \cdots, n;$$

$$b_{k\,k} = (Aq_k, Aq_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.30)$$

Визначивши коефіцієнти $b_{k\,k-1}$, $b_{k\,k}$ за формулою (3.29) вираховуємо q'_{k+1}, котрий при вдалому виборі початкового вектора q_1 може виявитися відмінним від нульового. Якщо $q'_{k+1} \neq 0$, то в якості $(k+1)$ - го вектора сім'ї, що будується, беремо

$$q_{k+1} = \frac{q'_{k+1}}{|q'_{k+1}|}, \qquad (3.31)$$

$$b_{k\,k+1} = |q'_{k+1}|, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В результаті таких обчислень можна побудувати всі вектори сім'ї $\{q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, визначити елементи b_{ij} додатньо визначеної тридіагональної матриці B і отримати зображення (3.27).

3.4. Метод біортогоналізації послідовних ітерацій початкових векторів матрицями A і A^* [37, 69]. Метод ортогоналізації послідовних ітерацій, запропонований К. Ланцошем [116, 117], можна розглядати як узагальнення його методу мінімальних ітерацій на випадок несиметричної матриці A: ☼$^{(n)} \to$ ☼$^{(n)}$. Суть методу полягає в тому, що при вдалому виборі початкових векторів u_1 і v_1 будується не одна, як в розглянутих вище методах, а дві послідовності $\{u_i\}$ і $\{v_i\}$ спряжених між собою векторів u_i і v_1, $i = 1, 2, \ldots, n$, кожна з яких знаходиться в біортогональному відношенні з однією з оболонок ☹$(v_1, A^*v_1, \ldots, (A^*)^k v_1)$ і ☹$(u_1, Au_1, \ldots, A^k u_1)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Розгляд двох замість однієї спряжених послідовностей векторів обумовлений наступним відомим з аналітичної геометрії фактом. Всі прості співвідношення між координатами векторів (у вигляді скалярних добутків), заданих в прямокутній системі, можна зберегти при переході до косокутної системи, якщо кожний вектор представляти в двоїстому базисі двома системами спряжених одна одній координат (які в

прямокутній системі між собою співпадають). Задаючи вектори — послідовні ітерації вектора несиметричною матрицею — в двоїстому базисі $\{u_i\}$ і $\{v_i\}$, ми можемо отримати таку ж просту по своїй структурі матрицю B, як і у випадку ітерацій симетричною матрицею.

Дійсно, вибудовуючи дві послідовності векторів за тричленними формулами вигляду

$$\begin{gathered} u_{k+1} = -\alpha_{k\,k-1} u_{k-1} - \alpha_{k\,k} u_k + A u_k, \\ v_{k+1} = -\beta_{k\,k-1} v_{k-1} - \beta_{k\,k} v_k + A^* v_k, \\ k = 2, 3, \ldots, n, \\ u_2 = -\alpha_{11} u_1 + A u_1, \\ v_2 = -\beta_{11} v_1 + A^* v_1 \end{gathered} \tag{3.32}$$

і визначаючи коефіцієнти $\alpha_{i\,j}$ і $\beta_{i\,j}$ з умов біортогональності векторів u_i і v_i, $i = 1, 2, \ldots, n,$ одразу одержуємо

$$\alpha_{k\,k} = \frac{(A u_k, v_k)}{(u_k, v_k)} = \frac{(u_k, A^* v_k)}{(u_k, v_k)} = \beta_{k\,k}. \tag{3.33}$$

Що ж до коефіцієнтів

$$\alpha_{kk-1} = \frac{(Au_k, v_{k-1})}{(u_{k-1}, v_{k-1})}, \quad \beta_{kk-1} = \frac{(A^* v_k, u_{k-1})}{(u_{k-1}, v_{k-1})},$$

то вони теж рівні між собою, що витікає з наступного ланцюжка рівностей

$$\begin{gathered} (A u_k, v_{k-1}) = (u_k, A^* v_{k-1}) = (-\alpha_{k-1\,k-2} u_{k-2} - \alpha_{k-1\,k-1} u_{k-1} + A u_{k-1}, v_k + \beta_{k-1\,k-2} v_{k-2} + \beta_{k-1\,k-1} v_{k-1}) = \\ = \alpha_{k-1\,k-2} \beta_{k-1\,k-2} (u_{k-2}, v_{k-2}) - \alpha_{k-1\,k-1} \beta_{k-1\,k-1} (u_{k-1}, v_{k-1}) + (A u_{k-1}, v_k) + \beta_{k-1\,k-2} (A u_{k-1}, v_{k-2}) + \\ + \beta_{k-1\,k-1} (A u_{k-1}, v_{k-1}) = (A u_{k-1}, v_k) = (A^* v_k, u_{k-1}). \end{gathered}$$

Далі, оскільки

$$(A^* v_k, u_{k-1}) = (A u_k, v_{k-1}) = (u_k, A^* v_{k-1}) = (u_k, v_k + \beta_{k-1\,k-2} v_{k-2} + \beta_{k-1\,k-1} v_{k-1}) = (u_k, v_k),$$

то, вибираючи орієнтування векторів біортогонального базису так, щоб було $(u_k, v_k) > 0$ для будь-яких значень $k = 1, 2, \ldots, n,$ отримуємо остаточно

$$\begin{gathered} \beta_{kk-1} \equiv \alpha_{kk-1} = \frac{(u_k, v_k)}{(u_{k-1}, v_{k-1})} > 0, \\ k = 2, 3, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.34}$$

Таким чином, для визначення по формулах (3.33) і (3.34) координат $b_{k\,k-1}$, $b_{k\,k}$ векторів - ітерацій в біортогональному базисі $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ вимагається вирахувати послідовно скалярні добутки (u_{k-1}, v_{k-1}), (u_k, v_k) і $(u_k, A^* v_k) = (A\, u_k, v_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$ (при $k = 1$ перший скалярний добуток не обчислюється). Самі ж вектори u_{k+1} і v_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n,$ потім знаходяться по рекурентним співвідношеннях (3.32). Процес обчислень обривається, якщо при деякому значенні $k = k_0$ одержуємо $(u_{k_0}, v_{k_0}) = 0$. Вважатимемо, що якщо $k_0 = n + 1$, то процес обчислень протікав нормально. Якщо ж $k_0 < n + 1$, то процес вироджується. Можливі декілька випадків виродження:

1^0. $u_{k_0} = v_{k_0} = 0$ (двосторонній обрив)

2^0. $u_{k_0} = 0, v_{k_0} \neq 0$ (односторонній обрив)

3^0. $u_{k_0} \neq 0, v_{k_0} = 0$ (односторонній обрив)

4^0. $u_{k_0} \neq 0, v_{k_0} \neq 0,$ але $(u_{k_0}, v_{k_0}) = 0$ (тупиковий обрив).

Односторонні і тупиковий обриви процесу обчислень являються винятковими і їх можна уникнути за допомогою належного вибору початкових векторів u_1 і v_1. Двосторонній обрив аналогічний достроковому припиненню обчислень в інших методах, причини яких обговорюються нижче.

Виходячи з виразів (3.32) — (3.34), можемо записати

$$
\begin{aligned}
Au_1 &= \beta_{11}u_1 + u_2 \\
Au_2 &= \beta_{21}u_1 + \beta_{22}u_2 + u_3 \\
&. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
Au_{n-1} &= \beta_{n-1n-2}u_{n-2} + \beta_{n-1n-1}u_{n-1} + u_n \\
Au_n &= \beta_{nn-1}u_{n-1} + \beta_{nn}u_n
\end{aligned}
\qquad (3.35)
$$

для векторів з оболонки ☹ $(u_1, Au_1, \ldots, A^{n-1}u_1)$ і

$$
\begin{aligned}
A^* v_1 &= \beta_{11}v_1 + v_2 \\
A^* v_2 &= \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + v_3 \\
&. \; . \\
A^* v_{n-1} &= \beta_{n-1n-2}v_{n-2} + \beta_{n-1n-1}v_{n-1} + v_n \\
A^* v_n &= \beta_{nn-1}v_{n-1} + \beta_{nn}v_n
\end{aligned}
\qquad (3.36)
$$

для векторів з оболонки ☹ $(v_1, A^*v_1, \ldots, (A^*)^{n-1}v_1)$.

Введемо зрозумілі вже нам позначення

$$
\begin{gathered}
[u_1, u_2, \ldots, u_n] = U, \\
[Au_1, Au_2, \ldots, Au_n] = AU, \\
[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V, \\
[A^* v_1, A^* v_2, \ldots, A^* v_n] = A^* V,
\end{gathered}
$$

$$
B^* = \begin{bmatrix}
\beta_{11} & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
\beta_{21} & \beta_{22} & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_{n-1n-2} & \beta_{n-1n-1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \beta_{nn-1} & \beta_{nn}
\end{bmatrix},
$$

тоді співвідношення (3.35) і (3.36) можна записати так:

$$AU = UB \qquad A^* V = VB \qquad (3.37)$$

Анулюючий матрицю B поліном $\varphi_n(t)$ будується по тричленним рекурентним формулам відповідно до схем (3.35) і (3.36).

3.5. Визначення власних векторів [69]. Розглянемо спочатку побудову власних векторів за даними методів ортогоналізації послідовних ітерацій і мінімальних ітерацій К. Ланцоша. Вважатимемо, що корені характеристичного полінома $\varphi_n(\lambda) = 0$ знайдені (яким-небудь з методів [8, 37]) і складають сукупність $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для кожного з власних векторів $u^{(i)}$, що відповідають власним значенням λ_i, можна записати зображення його в ортонормованому базисі $\{u_i\}$ у вигляді

$$u^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}u_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.38)$$

Компоненти $c_{ik} = (u^{(i)}, u_k)$, вектора $u^{(i)}$ в базисі $\{u_i\}$ можна знайти таким чином. Запишемо розклад початкового вектора u_1 ортонормованого базису по власних векторах $u^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Матимемо

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{(i)}.$$

Пригадаємо тепер формули (3.10 А) і (3.20 А) і для всіх подальших векторів u_k, $k = 2, 3, \dots, n,$ базису знайдемо

$$u_k = \frac{1}{\beta_{k-1k}} \varphi_{k-1}(A)\, u_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_{k-1k}} \varphi_{k-1}(\lambda_i) u^{(i)}.$$

Звідки зразу ж отримуємо

$$c_{ij} = (u^{(i)}, u_j) = \frac{\alpha_i}{\beta_{j-1j}} \varphi_{j-1}(\lambda_i) \tag{3.39}$$

Попутно замітимо, що значення поліномів $\varphi_{j-1}(\lambda_i)$ можна обчислювати безпосередньо по відповідним рекурентним формулах (3.11) і (3.22).

Таким чином, підставляючи значення (3.39) коефіцієнтів c_{ij} в зображення (3.38), одержуємо з точністю до деякого постійного множника α_i (тобто з тією ж точністю, з якою можна отримати їх, розв'язуючи систему (3.2))

$$u^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{k-1}(\lambda_i)}{\beta_{k-1k}} u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.40}$$

У випадку нормального перебігу процесу обчислень по методу A - мінімальних ітерацій власні вектори $u^{(i)}$ додатньо визначеної матриці визначаються так само у відповідності до приведеної схеми з тією тільки відмінністю, що в якості базису $\mathbb{C}^{(n)}$ вибирається сукупність $\{q_i\}$ A - ортонормованих векторів, що задовольняють умовам

$$(q_i, Aq_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Звідси з точністю до деякої постійної одержуємо

$$u^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{k-1}(\lambda_i)}{\beta_{k-1k}} q_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.41}$$

По аналогії з приведеними обчисленнями так само просто визначаються власні вектори $u^{(i)}$ і $v^{(i)}$ несиметричних матриць A і A^* за даними методу біортогоналізації. А саме, маємо

$$u^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{k-1}(\lambda_i)}{(u_k, v_k)} u_k,$$

$$v^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{k-1}(\lambda_i)}{(u_k, v_k)} v_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.42}$$

3.6. Розв'язок систем лінійних рівнянь. Наявність даних, які отримуються за допомогою методів, описаних в попередніх пунктах, дозволяє знаходити також і розв'язки систем лінійних рівнянь

$$Ax = b$$

$$A: \quad \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^{(n)}; \quad x, b \in \mathbb{C}^{(n)}. \tag{3.43}$$

Дійсно, здійснимо перетворення

$$\xi = U^* x, \tag{3.44}$$

де $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ — ортогональна матриця, складена з векторів-стовпців u_i, $i = 1, 2, \dots, n$, отриманих реалізацією або методу ортогональних ітерацій (п. 3.1), або методу мінімальних ітерацій (п. 3.2). Помножимо рівняння (3.43) зліва на матрицю U^* і з врахуванням рівностей (3.12) або (3.21), а також підстановки (3.44) отримаємо

$$B\xi = U^* b. \tag{3.45}$$

Ясно, що система (3.45) простіша початкової (3.43), особливо ця простота проявляється у випадку симетричної матриці A. Тоді, як ми пам'ятаємо, матриця B буде тридіагональною. В останньому випадку систему (3.43) можна розв'язати за допомогою одного витонче-

ного прийому [69], котрий можна розповсюдити на системи з несиметричною матрицею. Опис такого узагальнення не зустрічається в роботах [8, 12, 15, 37, 68, 69]. Проте, він може виявитися важливим для застосування. Тому приведемо тут цей результат.

Теорема 3.1. *Якщо початкові вектори* u_1 *і* $v_1 = Av_0$, $u_1, v_1, v_0 \in \mathbb{C}^{(n)}$, *і структура невиродженої несиметричної матриці* A: $\mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^{(n)}$ *такі, що забезпечують нормальний перебіг процесу обчислень по рекурентним формулам*

$$u_k = Au_{k-1} - \beta_{k-1k-1}u_{k-1} - \beta_{k-1k-2}u_{k-2},$$

$$v_k = A^* v_{k-1} - \beta_{k-1k-1}v_{k-1} - \beta_{k-1k-2}v_{k-2},$$

$$k = 2, 3, \dots, n,$$

$$u_2 = Au_1 - \beta_{11}u_1, \qquad v_2 = A^* v_1 - \beta_{11}v_1$$

векторів двоїстого базису $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ *в* $\mathbb{C}^{(n)}$, *де*

$$\beta_{k\,k} = \frac{(Au_k, v_k)}{(u_k, v_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\beta_{k\,k-1} = \frac{(u_k, v_k)}{(u_{k-1}, v_{k-1})}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

то розв'язок системи лінійних рівнянь

$$Ax = b,$$

який будемо шукати у вигляді

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_{0i} u_i,$$

може бути отриманий за n *послідовних кроків наближень по схемі*

$$x^{(1)} = \frac{(b, v_0)}{(u_1, v_1)} u_1,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{(r_k, v_{k-1})}{(u_k, v_k)} u_k,$$

$$r_k = b - Ax^{(k)}, \quad x^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{ki} u_i,$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

Доведення теореми витікає з наступних несуперечливих міркувань. Оскільки справедливі вирази

$$(x, v_k) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{0i}(u_i, v_k) = \xi_{0k}(u_k, v_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(x^{(k)}, v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{ki}(u_i, v_k) \equiv 0, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

то вектор $x - x^{(k)}$ задовольняє умовам

$$x - x^{(k)} \in \mathcal{L}(u_k, u_{k+1}, \dots, u_n) \perp \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}).$$

Тому для k - ої компоненти вектора-розв'язку x в базисі $\{u_i\}$ можна записати

$$\xi_k(u_k, v_k) = (x - x^{(k)}, v_k) = (x - x^{(k)}, A^*v_{k-1} - \beta_{k-1k-1}v_{k-1} - \beta_{k-1k-2}v_{k-2}) =$$

$$= (x - x^{(k)}, A^*v_{k-1}) = (r_k, v_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

де $r_k = Ax - Ax^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. Звідси одержуємо, що

$$\xi_k = \frac{(r_k, v_{k-1})}{(u_k, v_k)}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Отже,

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \xi_k u_k = \frac{(r_k, v_{k-1})}{(u_k, v_k)} u_k, \qquad (3.46)$$

що з врахуванням визначення першого наближення $x^{(1)}$ у відповідності з вибором початкового вектора $v_1 = A v_0$ повністю доводить теорему.

Помітимо, що нев'язку вектора $x^{(k)}$ можна вираховувати рекурентно за формулою

$$r_{k+1} = r_k - \frac{(r_k, v_{k-1})}{(u_k, v_k)} A u_k,$$

яка виводиться елементарно з посиланням на (3.46)

$$r_{k+1} = b - A x^{(k+1)} = b - A x^{(k)} - A(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = r_k - \frac{(r_k, v_{k-1})}{(u_k, v_k)} A u_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n+1.$$

На закінчення цього пункту відзначимо, що за наявності даних методу A - мінімальних ітерацій (п. 3.3) система лінійних рівнянь

$$A x = b \qquad (3.47)$$

(з додатньо визначеною матрицею) розв'язується простіше, ніж в попередніх випадках. Насправді, при реалізації методу A - мінімальних ітерацій ми одержуємо матрицю

$$Q = [q_1, q_2, \ldots, q_n],$$

складену з A - ортонормованих векторів - стовпців $q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \ldots, q_{nk})^*$ і тому має місце рівність

$$Q^* A Q = E^{(n)}.$$

Звідси, якщо покласти

$$x = Q\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^{(n)}$$

і помножити систему (3.47) зліва на матрицю Q^*, то негайно матимемо

$$Q^* A Q\xi = \xi = Q^* b$$

Отже, розв'язок системи (3.47) визначається у вигляді

$$x = Q Q^* b,$$

що, між іншим, дає для $A^{-1} = Q Q^*$.

3.7. Вибір початкових векторів і побудова базису в $\mathbb{C}^{(n)}$. Розглядаючи методи непрямого визначення коефіцієнтів характеристичного багаточлена, анулюючого матрицю (див. пункти 3.1 – 3.4), ми кожного разу підкреслювали, що нормальний перебіг процесу обчислень залежить не тільки від структури початкової матриці, але і від вдалого вибору початкового вектора (або пари векторів, якщо йдеться про метод біортогоналізації). Для того, щоб успіх завжди супроводив обчисленням по схемі того або іншого методу з'ясуємо можливі причини припинення обчислень і намітимо шляхи виходу з скрутних ситуацій. Втім, основна причина припинення обчислень ясна. Це — лінійна залежність системи векторів, отриманої ітераціями матрицею початкового вектора. В свою чергу для виявлення зв'язку характеристик цієї системи векторів із структурою матриці і з вибором початкового вектора використовуємо спеціальні базиси в $\mathbb{C}^{(n)}$.

Сконцентруємо нашу увагу перш за все на алгоритмах знаходження характеристичного полінома для симетричної матриці. Ці алгоритми простіші інших в тому відношенні, що, як відомо з лінійної алгебри, характеристичні багаточлени для симетричних матриць завжди розв'язувані в полі дійсних чисел. А це означає, що для всякої симетричної матриці існує (над полем дійсних чисел) хоча б один власний вектор. Втім кількість цих векторів не менше ніж кількість простих власних чисел. Це витікає з визначення (3.2) власних векторів.

Нехай $u^{(i)} \in \mathbb{C}^{(n)}$ — власні вектори симетричної матриці A, що відповідають простим власним значенням λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, k \le n$. Розкладемо початковий вектор $p^{(1)}$ (в методі мінімальних ітерацій $p^{(1)} = u_1$, в методі A - мінімальних ітерацій $p^{(1)} = q_1$) по базису $\{u^{(i)}\}$ з

власних векторів матриці A

$$p^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} p_{1i} u^{(i)} + \widetilde{p}^{(1)} \qquad (3.48)$$

де $\widetilde{p}^{(1)}$ – $(n-k)$ - мірний вектор, що належить доповненню ☼$^{(n)} \setminus$ ☹$(u^{(1)},\dots,u^{(k)})$ лінійної оболонки ☹$(u^{(1)},\dots,u^{(k)})$ до всього простору ☼$^{(n)}$. Відмітимо, що якщо серед власних чисел λ_i є кратні, то $k < n$. Для ітерацій вектора $p^{(1)}$ матрицею A одержуємо

$$A^m p^{(1)} = \sum_{i=1}^{k_0} p_{1i} \lambda_i^m u^{(i)}, \quad k_0 \le k \le n, \qquad (3.49)$$

де $k_0 < k$, якщо серед власних значень є рівні нулю. Зображення (3.48) і (3.49) виписані для найсприятливішого вибору вектора, коли $p_{1i} \ne 0,\ i = 1, 2, 3, \dots, k \le n$. Проте може трапитися, що навмання вибраний вектор $p^{(1)}$ належить ☹$(u^{(1)},\dots,u^{(l)})$, $l < k$, і тоді отримаємо

$$p^{(1)} = \sum_{i=1}^{l} p_{1i} u^{(i)},$$

$$A^m p^{(1)} = \sum_{i=1}^{k_1} p_{1i} \lambda_i^m u^{(i)},$$

$$k_1 = \min(l, k_0).$$

Таким чином, ітерації

$$p^{(1)}, Ap^{(1)}, \dots, A^{n-1} p^{(1)}, \qquad (3.50)$$

вектора $p^{(1)}$ симетричною матрицею A будуть лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли серед чисел $\lambda_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ немає кратних $(k \equiv n)$ і рівних нулю $(k_0 \equiv k \equiv n)$, а вектор $p^{(1)}$ вибраний так, що жодна з компонент $p_{1i},\ i = 1, 2, \dots, n$ не дорівнює нулю. Якщо ж $p^{(1)} \in$ ☹$(u^{(1)},\dots,u^{(l)})$, $(l < n)$, то в послідовності (3.50) незалежними виявляться тільки вектори $A^m p^{(1)},\ m = 0, 1, \dots, l-1,$ тоді як вектори $A^m p^{(1)},\ m = l, l+1, \dots, n-1,$ будуть лінійно від них залежати. Це трапиться вже для $l = 1,$ якщо $p^{(1)} = u^{(1)}$ або для $k = 2$, якщо $p^{(1)} = p_{11} u^{(1)} + p_{12} u^{(2)}$ і т. п. Цими міркуваннями ми не знайшли ще критерію для сприятливого вибору початкового вектора $p^{(1)}$, але принаймні з'ясували, від чого залежить припинення обчислень. Це може бути зв'язано або з наявністю в спектрі[5] матриці кратних власних чисел, або чисел, рівних нулю, або з тим, що початковий вектор належить лінійній оболонці власних векторів матриці, не співпадаючої зі всім простором.

Повернемося до рівностей (3.49) і відзначимо, що за наявності в спектрі матриці одного або декількох власних чисел, які перевершують по модулю інші, ці великі по модулю числа, складові $p_{1i} \lambda_i^m u^{(i)}$, що містять ці більші за модулем числа, виявляться переважаючими. Звідси виводимо наступне правило вибору початкового вектора $p^{(1)}$. Беремо довільний вектор, наприклад, вектор – праву частину системи рівнянь, якщо така задана, або яку-небудь сторону $a_{(k)} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ заданої матриці і послідовно обчислюємо

$$p_{(1)} = A a^*_{(k)}, \quad p_{(2)} = A p_{(1)}, \dots, p_{(m)} = A p_{(m-1)}.$$

Якщо $m = 5 \div 6$, то найбільші по модулю власні значення вже гратимуть основну роль і вектор $p_{(m)}$ буде близьким до лінійної оболонки, натягнутої на власні вектори, що відповідають великим за модулем власним значенням. Нехай серед компонент $p_{mi},\ i = 1, 2, \dots, n$, вектора $p_{(m)}$ компоненти $p_{mi_k},\ i = 1, 2, 3, \dots, l \le n,$ виявилися “малими” за модулем. Змінимо їх дові-

[5] Спектром матриці як правило називають дискретну множину $\{\lambda_i\}$ коренів її характеристичного полінома.

льним чином, додавши до них деякі числа $\gamma_{\,ik}$. В результаті отримаємо

$$\widetilde{p}_{(m)} = (\widetilde{p}_{m1}, \dots, \widetilde{p}_{mn})^*$$

$$\widetilde{p}_{mi} = \begin{cases} p_{mi}, & i = i_k \\ p_{mi_k} + \gamma_{\,i_k}, & i = i_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \end{cases}$$

Далі, обчислимо лінійну комбінацію

$$\widetilde{p}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_{\,i} \, p_{(i)} + \widetilde{p}_{(m)}$$

при заданих $\gamma_{\,i}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, і в якості початкового вектора $p^{(1)}$ беремо відповідним чином пронормований вектор $\widetilde{p}^{(1)}$.

Проте такий вибір початкового вектора зовсім не гарантує того, що процес обчислень в будь-якому з методів ітерацій (див. пункти 3.2 – 3.3) завершиться нормально. Тепер його протікання визначатиметься структурою матриці. Нижче для стислості поведемо мову тільки про процедури, регулюючі процес обчислення в методі мінімальних ітерацій. Якщо обчислення за цим методом завершуються достроково на k – ому кроці при $k < n$, то це означає, що $\varphi_{\,k}(\lambda)$ буде мінімальним анулюючим вектор $p^{(1)} = u_1$ поліномом. Слідуючи пропозиціям [69], покажемо, як можна добудувати систему векторів

$$u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$$

до ортонормованого базису всього простору ✡$^{(n)}$, якщо вектор u_k виявився лінійно залежним від векторів оболонки ☹$(u_1, \dots, u_{k-1})$, тобто, якщо на k – ому кроці ми отримали

$$0 = -\sum_{i=1}^{k-1} \beta_{\,k-1\ i} \ u_i + A\, u_{k-1}$$

$$\beta_{\,k-1\ k} = 0, \quad k < n.$$

Продовжувати обчислення будемо за наступною схемою.
Виберемо вектор $\widetilde{p}^{(2)}$, що не належить ☹$(u_1, \dots, u_{k-1})$, у вигляді

$$\widetilde{p}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{\,i} \ u_i + \gamma_{\,k} \, e_k, \qquad p^{(2)} = \left\| \widetilde{p}^{(2)} \right\|^{-1} \widetilde{p}^{(2)},$$

де $\gamma_{\,i}, i = 1, 2, \dots, k$, задані числа, а e_k — одиничний вектор з компонентами рівними нулю за виключенням k - ої, рівній одиниці. Розкладемо вектор $p^{(2)}$ на дві складові

$$p_1^{(2)} \perp \text{☹}(u_1, \dots, u_{k-1}) \quad \text{і} \quad p_2^{(2)} \in \text{☹}(u_1, \dots, u_{k-1})$$

і в якості u_k послідовності, що будується, беремо вектор

$$u_k = \frac{p_1^{(2)}}{\left\| p_1^{(2)} \right\|}.$$

Проекцію $p_1^{(2)}$ відшукуємо тим же способом ортогоналізації, який застосовувався для побудови всіх попередніх векторів $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$. Наступний $(k+1)$ – ий вектор обчислюється точно так, як і визначався вектор u_2, тобто знаходиться спочатку

$$u_{k+1}{}' = -\beta_{\,kk} \ u_k + A\, u_k$$

і т.д. і т.п.

Ітерації вектора u_k матрицею A можуть виявитися знову лінійно залежними на деякому l – ому кроці обчислень. Якщо $l < n$, то доведеться повторити описану вище процедуру, починаючи з вибору нового вектора $\widetilde{p}^{(3)}$ і т.д. Для того, щоб завершити обчислення можливо доведеться побудувати декілька лінійних оболонок

$$\text{☹}_{p^{(1)}}(u_1, \dots, u_{k-1}), \quad \text{☹}_{p^{(2)}}(u_k, \dots, u_{l-1}), \dots, \ \text{☹}_{p^{(m)}}(u_t, \dots, u_n)$$

ортогональних одна одній. При цьому весь простір ☼$^{(n)}$ розвивається природним чином в пряму суму цих оболонок

$$☼^{(n)} = ☹_{p^{(1)}}(u_1, \ldots, u_{k-1}) \oplus ☹_{p^{(2)}}(u_k, \ldots, u_{l-1}) \oplus \ldots \oplus ☹_{p^{(m)}}(u_t, \ldots, u_n) \qquad (3.51)$$

А оскільки кожна з цих оболонок отримана на підставі ітерацій деякого початкового вектора $\tilde{p}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m \le n$, анульованого відповідним поліномом $\varphi^{(i)}(t)$, то характеристичний поліном матриці A з точністю до деякої постійної співпадає з добутком мінімальних поліномів $\varphi^{(i)}(t)$, що анулюють послідовні "початкові вектори" $\tilde{p}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, тобто

$$\varphi_n(t) = \prod_{i=1}^{m} \varphi^{(i)}(t),$$

де кожний з поліномів $\varphi^{(i)}(t)$, відповідний вектору $\tilde{p}^{(i)}$, знаходиться за схемою (3.11). Випишемо для огляду матрицю B переходу від системи векторів $\{u_i\}$ до системи $\{A^m u_i\}$, що відповідає випадку

$$☼^{(n)} = ☹(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}) \oplus ☹(u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

Матимемо

$$B^* = \left| \begin{array}{ccccccccccccc}
\beta_{11} & \beta_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{k-2\,k-3} & \beta_{k-2\,k-2} & \beta_{k-2\,k-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{k-1\,k-2} & \beta_{k-1\,k-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \beta_{k\,k} & \beta_{k\,k+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \beta_{k+1\,k} & \beta_{k+1\,k+1} & \beta_{k+1\,k+2} & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta_{n-1\,n-2} & \beta_{n-1\,n-1} & \beta_{n-1\,n} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \beta_{n\,n-1} & \beta_{n\,n}
\end{array} \right|$$

Як бачимо, в описаному випадку матриця B складається з двох тридіагональних кліток, кожна з яких співпадає по своїй структурі з матрицею перетворення (3.20). Очевидно, в загальному випадку, відповідаючому розбиттю (3.51), матриця B складатиметься з m тридіагональних кліток.

Побудова базису $\{q_i\}$ в ☼$^{(n)}$ і відшукання коефіцієнтів характеристичного багаточлена $\varphi_n(\lambda) = 0$ за допомогою методу A - мінімальних ітерацій здійснюється майже у відповідності з описаною вище схемою за винятком однієї обставини, коли замість ортонормованої будується A - ортонормована сукупність векторів.

Описаний спосіб вибору початкового вектора і схема добудови базису в ☼$^{(n)}$ легко узагальнюються на випадок несиметричної матриці. Дещо складніше обґрунтувати це узагальнення, оскільки не кожний характеристичний поліном (з дійсними коефіцієнтами) несиметричної матриці вирішуваний в полі дійсних чисел і в зв'язку з цим не кожна несиметрична матриця має хоча б один власний вектор над цим полем. За недоліком місця і часу ми не торкатимемося тут цього питання, а тільки відмітимо наступне. Процес обчислень в методі ортогоналізації послідовних ітерацій (п. 3.1), якщо він обривається достроково на k – ому кроці, $k < n$, можна продовжити, вибираючи в якості вектора u_k знову підібраний вектор $p^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m \le n$, за описаною вище схемою без яких би то не було змін.

Що ж до методу біортогоналізації (п. 3.4), то при односторонніх або тупикових обривах обчислення доводиться починати спочатку із знову вибраними початковими векторами u_1 і v_1. Якщо ж має місце двосторонній обрив, то отримана послідовність векторів взаємного базису

$$u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \tag{3.52}$$

відповідним чином добудовується. При виборі пари початкових векторів u_1, v_1, як і при виборі початкового вектора в методах мінімальних ітерацій, заздалегідь можна обчислити послідовності

$$u_{(2)} = Au_{(1)}, \quad u_{(3)} = Au_{(2)}, \quad \ldots \quad , \quad u_{(m)} = Au_{(m-1)},$$
$$v_{(2)} = A^* v_{(1)}, \quad v_{(3)} = A^* v_{(2)}, \quad \ldots \quad , \quad v_{(m)} = A^* v_{(m-1)},$$

де в якості $u_{(1)}$ і $v_{(1)}$ можна, наприклад, взяти відповідно який-небудь рядок $a^*_{(k)}$ і стовпець $a^{(k)}$ матриці A і на цій основі визначити u_1 і v_1. Добудова системи (3.52) починається з вибору таких векторів $p^{(i)}$ і $q^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \le n$, які задовольняють умовам

$$p^{(i)} \notin \mathfrak{L}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}) \quad \text{і} \quad p^{(i)} \perp \mathfrak{L}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$$
$$q^{(i)} \notin \mathfrak{L}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \quad \text{і} \quad q^{(i)} \perp \mathfrak{L}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}) \tag{3.53}$$

Якщо на k – ому кроці має місце двосторонній обрив, а вектори $p^{(1)}$ і $q^{(1)}$ підібрані відповідно до вказаних вимог, то вважаємо $u_k = p^{(1)}$, $v_k = q^{(1)}$. Процес побудови послідовності (3.52) продовжуємо до наступного l – того обриву. Він може виявитися останнім, якщо $l = n$. При $l < n$ обчислення продовжуються з новими векторами $u_l = p^{(2)}$, $v_l = q^{(2)}$, які задовольняють умовам (3.53) при $k = l$ і т.д. і т.п.

3.8. Процеси доортогоналізації при чисельній реалізації канонічних зображень (3.12), (3.21), (3.27) і (3.37). В попередніх пунктах описані деякі методи непрямого визначення коефіцієнтів характеристичних поліномів симетричних і несиметричних дійсних матриць, а також засновані на цих методах способи обчислення власних векторів (при заданих власних числах) і розв'язків систем лінійних рівнянь з такими матрицями. Ми бачили, що для визначення коефіцієнтів анулюючого матрицю полінома вимагалося виконати певний об'єм обчислень. Так, в методі ортогоналізації послідовних ітерацій доводилося вираховувати лінійні комбінації (3.6) – (3.7) вигляду

$$u'_{k+1} = Au_k - \sum_{i=1}^{k} \beta_{ki} u_i,$$
$$\beta_{ki} = (Au_k, u_i), \quad \beta_{k\,k+1} = \| u'_{k+1} \|, \tag{3.54}$$
$$u_{k+1} = \beta^{-1}_{k\,k+1} u'_{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В методі мінімальних ітерацій (п. 3.2) проводилися аналогічні обчислення (див. (3.13), (3.18), (3.19)), тільки в меншому об'ємі. Складніші обчислення (див. (3.30) – (3.31) виконувалися в методі A - мінімальних ітерацій за формулами

$$q'_{k+1} = -b_{k\,k-1} q_{k-1} - b_{k\,k} q_k + Aq_k,$$
$$b_{k\,k-1} = (Aq_k, Aq_{k-1}), \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$b_{k\,k} = (Aq_k, Aq_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.55}$$
$$b_{k\,k+1} = \sqrt{(Aq'_{k+1}, q'_{k+1})},$$
$$q_{k+1} = b'_{k\,k+1} q'_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

І, нарешті, в методі біортогоналізації (п. 3.4) — за формулами

$$u_{k+1} = -b_{k\,k-1} u_{k-1} - b_{k\,k} u_k + Au_k,$$
$$v_{k+1} = -b_{k\,k-1} v_{k-1} - b_{k\,k} v_k + A^* v_k, \tag{3.56}$$
$$b_{k\,k} = \frac{(Au_k, v_k)}{(u_k, v_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad b_{k\,k-1} = \frac{(u_k, v_k)}{(u_{k-1}, v_{k-1})}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Далі, для відшукання власних векторів матриць у вигляді (3.40), (3.41) і (3.42) перш за все повинні бути визначені коефіцієнти $\beta_{k\,i}$, $b_{k\,i}$ по відповідних формулах (3.54) – (3.56), а

для отримання розв'язку систем лінійних рівнянь необхідно мати крім цих коефіцієнтів ще і значення векторів u_i, v_i, Au_i, A^*v_i, q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, по можливості більш точні. Проте в зв'язку з тим, що при реалізації на ЕОМ майже кожної арифметичної операції неминуче виникають, а при великому числі операцій нагромаджуються помилки заокруглення, немає ніяких підстав сподіватися на отримання добрих результатів при реалізації схем (3.54) – (3.56). Це підтверджується дослідженнями [12, 15, 33, 37, 68, 69, 95], де також сказано, що для отримання з деякою гарантованою точністю результатів типу скалярних добутків (при множенні матриці на вектор), необхідно спеціальним чином організувати весь обчислювальний процес. Зокрема, щоб отримати мінімальну похибку заокруглення суми деяких чисел, необхідно підсумовувати ці числа, ранжирувані за величиною їх модуля, починаючи з найменшого (за абсолютною величиною). Надалі, не зауважуючи кожного разу особливо, широко користуватимемося "впорядкованим підсумовуванням". Втім, використання одного тільки "впорядкованого підсумовування" не завжди приводить до бажаного результату. Так, наприклад, вже при нормуванні вектора $u^{(k)}$ за схемою

$$u_k = \frac{u_k}{\left\| u^{(k)} \right\|}, \quad \left\| u^{(k)} \right\|^2 = (u^{(k)}, u^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} u_{k\,i}^2 \tag{3.57}$$

часто не вдається досягти рівності [12, 95]. Для того, щоб обчислити орт u у напрямі вектора $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n)^*$, потрібно, як це рекомендується в [95], провести циклічні обчислення за схемою (3.57) для $k = 1, 2, \ldots, m$, починаючи обчислення з вектора $u^{(1)} = \widetilde{u}$ і закінчуючи їх отриманням вектора $u_m = u$, для якого має місце нерівність $\left| \left\| u_m \right\| - 1 \right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — машинна точність зображення чисел. На приведеному прикладі проілюстрована основна ідея обчислень того або іншого результату: для відновлення втраченої при заокругленнях точності початкових даних потрібно будувати деякий (швидкозбіжний) ітераційний процес з врахуванням непокори машинної арифметики звичайним законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності. Ідея використання послідовних наближень (з вказівкою необхідного числа ітерацій), направлених на відновлення значущих цифр шуканого результату, являється основним, якщо не єдино можливим, засобом розв'язку поставленої в даному розділі задачі. Без її реалізації не можна визначити жодним з методів, розглянутих в пунктах 3.1 – 3.4, коефіцієнти характеристичного полінома з високою точністю.

Першим кроком в реалізації даної ідеї є побудова за допомогою відповідних ітерацій (донормування по [95]) одиничних або A - одиничних векторів, що дозволяють більш надійно визначити як самі вектори u_k і q_k, так і коефіцієнти $\beta_{k\,i}$ і $b_{k\,i}$ рекурентних зв'язків між ними у вигляді (3.54) - (3.56). Ми з самого початку передбачили застосування цієї процедури і тому подали опис методів в пунктах 3.1 – 3.3 на відміну від традиційного їх викладу в роботах [8, 37, 69] з врахуванням нормування системи векторів, що будується.

Другий крок полягає в побудові ітераційного процесу для обчислення ортогональної (A - ортогональної або біортогональної) системи векторів. Описані в пунктах 3.1 – 3.4 процеси ортогоналізації являються дуже нестійкими по відношенню до помилок заокруглень процедурами, особливо в умовах поганої обумовленості матриць. В зв'язку з цим нагадаємо, що спектр погано обумовлених[2] матриць належить досить широкому інтервалу, який включає як дуже великі, так і дуже малі за модулем значення власних чисел [95]. А це означає, що при поганій обумовленості матриці A в послідовності

$$u_1, Au_1, \ldots, A^k u_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

(або в послідовностях $\{A^k q_1\}$, $\{(A^*)^k v_1\}$) обов'язково присутні близькі по нормі ☼$^{(n)}$ (або ☼$_A^{(n)}$) вектори. Останнє в свою чергу може привести до того, що при визначенні з невисокою

---

[2] Погано обумовленими називають [68, 69, 95] матриці A, для яких міра $c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ приймає значення, що значно перевищують одиницю.

точністю k – го ортогонального (A - ортогонального або біортогонального) вектора u_k лінійної оболонки $\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ (або їй відповідних в інших методах) початкові вектори $A u_{k-1}$ і $\sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k\,i} u_i$ (або їм відповідні) для $k = 2, 3, \ldots, n+1,$ можуть виявитися майже лінійно залежними і, як наслідок цього, вектор u_k не буде ортогональним до лінійної оболонки $\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ (або їй відповідних). Тому особливого значення набувають наступні пропозиції.

Теорема 3.2. *Нехай початковий орт* $u_1 \in \mathbb{R}^{(n)}$ *і структура матриці* A: $\mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(n)}$ *такі, що послідовність*

$$u_1,\, Au_1, \ldots, A^{n-1}u_1$$

складається з лінійно незалежних векторів n *- мірного евклідового простору* $\mathbb{R}^{(n)}$. *Система векторів* $\{u_i\}$ *буде практично ортогональною еквівалентній системі векторів лінійної оболонки*

$$\mathcal{L}(u_1, Au_1, \ldots, A^k u_1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тоді і тільки тоді, коли кожний вектор u_k, $k = 1, 2, \ldots, n,$ *буде визначатися за допомогою наступного процесу доортогоналізації*

$$u_k = \lim_{i\to\infty} u_k^{(i)}, \quad u_k^{(i)} = \widetilde{u}_k^{(i)} \left\| \widetilde{u}_k^{(i)} \right\|_{R^{(n)}}^{-1},$$

$$\widetilde{u}_k^{(i)} = u_k^{(i-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{k-1\,j}^{(i-1)} u_j, \quad \beta_{k-1\,j}^{(i-1)} = (u_k^{(i-1)}, u_j), \quad j \le k-1, \tag{3.58}$$

$$\beta_{k-1\,k}^{(i-1)} = \left\| \widetilde{u}_k^{(i)} \right\| = \left\| u_k^{(i-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{k-1\,j}^{(i-1)} u_j \right\|, \quad k \le n$$

$$u_k^{(0)} \equiv A u_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

який для отримання доброго наближення $u_k^{(i)}$ *вектора* u_k, *що задовольняє нерівності*

$$\left\| u_k - u_k^{(l)} \right\| \le \varepsilon,$$

достатньо припинити на l *– ому кроці, коли буде досягнута нерівність*

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{k-1\,j}^{(l)} u_{j\,p} \right| \le \varepsilon_0,$$

де в якості "порогу" $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ *береться число* $\varepsilon_0 = 2^{-s}\left| u_{k\,p}^{(0)} \right| = 2^{-s} \min_i \left| u_{k\,i}^{(0)} \right|$, *а* s — *кількість значущих цифр мантиси чисел (в двійковому коді).*

Теорема 3.3. *Нехай початковий вектор* $q_1 \in \mathbb{R}_A^{(n)}$ *вибраний так, що сукупність*

$$q_1, Aq_1, \ldots, A^{n-1}q_1,$$

отримана ітераціями вектора q_1 *додатньо визначеною матрицею* A, *складається з лінійно незалежних векторів* n *- мірного евклідового простору* $\mathbb{R}_A^{(n)}$. *Система векторів* $\{q_i\}$ *буде* A *- ортогональною і еквівалентною системі векторів оболонки*

$$\mathcal{L}(q_1, Aq_1, \ldots, A^k q_1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тоді і тільки тоді, коли кожний вектор q_k, $k = 2, 3, \ldots, n,$ *визначатиметься за допомогою наступного процесу* A *- доортогоналізації*

$$q_k = \lim_{i\to\infty} q_k^{(i)}, \quad q_k^{(i)} = \widetilde{q}_k^{(i)} \left\| \widetilde{q}_k^{(i)} \right\|_{R_A^{(n)}}^{-1},$$

$$\widetilde{q}_k^{(i)} = q_k^{(i-1)} - b_{k-1\,k-1}^{(i-1)} q_{k-1} - b_{k-1\,k-2}^{(i-1)} q_{k-2},$$

$$b_{k-1\,k-2}^{(i-1)} = (q_k^{(i-1)}, Aq_{k-2}),$$

$$b_{k-1\,k-1}^{(i-1)} = (q_k^{(i-1)}, Aq_{k-1}),$$
$$b_{k-1\,k}^{(i-1)} = \|\tilde{q}_k^{(i)}\|_{R_A^{(n)}} = \sqrt{(A\tilde{q}_k^{(i)}, \tilde{q}_k^{(i)})},$$
$$q_k^{(0)} \equiv Aq_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

який для отримання доброго наближення $q_k^{(i)}$ вектора q_k, що задовольняє нерівності

$$\|q_k - q_k^{(l)}\|_{R^{(n)}} \le \varepsilon,$$

досить припинити на l – ому кроці при досягненні нерівності

$$\left| b_{k-1\,k-1}^{(l)} q_{k-1\,p} + b_{k-1\,k-2} q_{k-2\,p} \right| \le \varepsilon_0,$$

де як "поріг" $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ *береться число* $\varepsilon_0 = 2^{-s}\left|q_{k\,p}^{(0)}\right| = 2^{-s}\min\limits_i\left|q_{k\,i}^{(0)}\right|$.

Теорема 3.4. *Нехай початкові вектори $u_1 \in \mathbb{R}^{(n)}$, $v_1 \in \mathbb{R}^{*\,(n)}$ і структура матриці $A\colon \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(n)}$ такі, що кожна з послідовностей*

$$u_1, Au_1, \ldots, A^{n-1}u_1 \quad і \quad v_1, A^*v_1, \ldots, (A^*)^{n-1}v_1$$

складаються з лінійно незалежних векторів n - мірних евклідових просторів $\mathbb{R}^{(n)}$ і $\mathbb{R}^{*\,(n)}$, де $\mathbb{R}^{*\,(n)}$ — спряжений з $\mathbb{R}^{(n)}$ простір. Сукупності векторів $\{u_i\}$ і $\{v_i\}$ будуть еквівалентними відповідно лінійним оболонкам

$$\mathcal{L}(u_1, Au_1, \ldots, A^k u_1) \quad і \quad \mathcal{L}(v_1, A^*v_1, \ldots, (A^*)^k v_1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і біортогональними тоді і тільки тоді, коли кожний з векторів $u_k \in \mathbb{R}^{(n)}$, $v_k \in \mathbb{R}^{*\,(n)}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, будуть визначатися за допомогою наступного ітераційного процесу

$$u_k = \lim_{i\to\infty} u_k^{(i)}, \quad v_k = \lim_{i\to\infty} v_k^{(i)},$$
$$u_k^{(i)} = -\beta_{k-1\,k-2}^{(i-1)} u_{k-2} - \beta_{k-1\,k-1}^{(i-1)} u_{k-1} + u_k^{(i-1)},$$
$$v_k^{(i)} = -\beta_{k-1\,k-2}^{(i-1)} v_{k-2} - \beta_{k-1\,k-1}^{(i-1)} v_{k-1} + v_k^{(i-1)},$$
$$\beta_{k-1\,k-2}^{(i-1)} = \frac{(v_k^{(i-1)}, u_{k-2})}{(u_{k-2}, v_{k-2})}, \quad \beta_{k-1\,k-1}^{(i-1)} = \frac{(u_k^{(i-1)}, v_{k-1})}{(u_{k-1}, v_{k-1})},$$
$$u_k^{(0)} \equiv Au_{k-1}, \quad v_k^{(0)} \equiv A^* v_{k-1},$$

який для отримання добрих наближень

$$\|u_k - u_k^{(l)}\|_{R^{(n)}} \le \varepsilon, \quad \|v_k - v_k^{(l)}\|_{R^{*(n)}} \le \varepsilon,$$

векторів u_k і v_k досить обірвати на l – ому кроці при досягненні кожної з нерівностей

$$\left| \beta_{k-1\,k-2}^{(l)} u_{k-2\,p} + \beta_{k-1\,k-1}^{l} u_{k-1\,p} \right| \le \varepsilon_0,$$
$$\left| \beta_{k-1\,k-2}^{(l)} v_{k-2\,p} + \beta_{k-1\,k-1}^{l} v_{k-1\,p} \right| \le \varepsilon_0,$$

де в якості "порогу" $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ *береться число* $\varepsilon_0 = 2^{-s} w_{k\,p} = 2^{-s}\min\limits_{i,j}\left(\left|u_{k\,i}^{(0)}\right|, \left|v_{k\,j}^{(0)}\right|\right)$.

Доведення кожної з цих трьох конструктивних теорем відрізняються одне від іншого незначними нюансами. Тому достатньо привести хоча б одне з них. Обмежимося доведенням теореми 3.2.

Покажемо, перш за все, що процес доортогоналізації збігається, тобто, що при $i = 1, 2, 3, \ldots$, вектор

$$u_k^{(i)} \to u_k \perp \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}).$$

Позначимо через $B_{k\,i}$ матрицю переходу від системи векторів $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(i+1)}$ до системи $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(i)}$, яка внаслідок рекурентних співвідношень (3.54) має вигляд

$$B_{k\,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta^{(i)}_{k-11} & \beta^{(i)}_{k-12} & \dots & \beta^{(i)}_{k-1k} \end{bmatrix} \qquad (3.59)$$

Оскільки вектори $\widetilde{u}_k^{(i)}$ і u_j, $j = 1, 2, \dots, k-1$, майже ортогональні, то елементи $\beta^{(i)}_{k-1j}$ матриці $B_{k\,i}$ задовольняють нерівностям $\left|\beta^{(i)}_{k-1j}\right| << 1$ при $j \le k-1$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Далі, з очевидної рівності

$$\left\|\widetilde{u}_k^{(i+1)}\right\|^2 = \left\|u_k^{(i)}\right\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1}(u_j, u_k^{(i)})^2 = 1 - \sum_{j=1}^{k-1}(\beta^{(i)}_{kj})^2$$

витікає, що

$$0 \le \left|\beta^{(i)}_{kj}\right| < \beta^{(i)}_{k-1k} \le 1. \qquad (3.60)$$

Тому кожна з матриць $B_{k\,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, невироджена і має обернену

$$B^{-1}_{k\,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{(i)}_{k-11} & \gamma^{(i)}_{k-12} & \dots & \gamma^{(i)}_{k-1k} \end{bmatrix}, \qquad (3.61)$$

де, як неважко отримати $\gamma^{(i)}_{k-1j} = -\dfrac{\beta^{(i)}_{k-1j}}{\beta^{(i)}_{k-1k}}$ при $j \le k-1$ і $\gamma^{(i)}_{k-1k} = -\dfrac{1}{\beta_{k-1k}}$. З співвідношень (3.56) виходить, що елементи $\gamma^{(i)}_{k-1j}$ оберненої матриці $B^{-1}_{k\,i}$ підкоряються нерівностям

$$0 \le \left|\gamma^{(i)}_{k-1j}\right| < 1 \le \gamma^{(i)}_{k-1k} \qquad (3.62)$$

Позначимо тепер через $U_p^{(n,k)}$ майже напівортогональну матрицю, складену з векторів – стовпців $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^{(P)}$, а через C матрицю — з векторів - стовпців $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, A\,u_{k-1}$. Тоді процес доортогоналізації (3.54) можна записати у вигляді наступної матричної рівності

$$U_p^{(n,k)} = C\left(\left(\prod_{i=0}^{p} B_{k\,i}\right)^{-1}\right)^{*} \qquad (3.63)$$

і доведення збіжності процесу (3.54) зводиться, таким чином, до визначення границі

$$\lim_{p\to\infty} U_p^{(n,k)} = U^{(n,k)}$$

по нормі $R^{(k)}$, $k \le n.$

Оцінимо різницю $\left\|U_q^{(n,k)} - U_p^{(n,k)}\right\|$, вважаючи для визначеності, що $q > p$. З рівності (3.63) маємо

$$U_q^{(n,k)} - U_p^{(n,k)} = C\left(\left(\prod_{i=0}^{q} B^{*}_{k\,i}\right)^{-1} - \left(\prod_{i=0}^{p} B^{*}_{k\,i}\right)^{-1}\right) =$$

$$= C\left(\prod_{i=0}^{p} B^{*}_{k\,i}\right)^{-1}\left(\left(\prod_{i=p}^{p} B^{*}_{k\,i}\right)^{-1} - E^{(k)}\right) = U_p^{(n,k)}\left(\left(\prod_{i=p}^{p} B^{*}_{k\,i}\right)^{-1} - E^{(k)}\right).$$

Звідси, посилаючись на нерівності (3.60), одержуємо

$$\left\|U_q^{(n,k)} - U_p^{(n,k)}\right\| \le \left\|U_p^{(n,k)}\right\| \cdot \left\|(B^{-1}_{k\,p})^{q-p} - E^{(k)}\right\|.$$

Остання нерівність з врахуванням співвідношень (3.62) при $q, p \to \infty$ показує, що послідов-

ність матриць $\{U_p^{(n,k)}\}$ збігається в собі по нормі простору матриць. Отже, при $q, p \to \infty$

$$\left| \left\| U_q^{(n,k)} \right\| - \left\| U_p^{(n,k)} \right\| \right| \to 0,$$

тобто числова послідовність $\left\{ \left\| U_p^{(n,k)} \right\| \right\}$ збігається в собі і, значить, обмежена. А це в свою чергу означає, що

$$U^{(n,k)} = \lim_{p\to\infty} U_p^{(n,k)}$$

за нормою $R^{(k)}, k \le n.$

Для завершення доведення теореми помітимо, що в умовах обмеженої точності представлення чисел немає необхідності в отриманні наближень $u_k^{(i)}$ з великими значеннями індексу i (при цьому обчислення на комп'ютері “зациклюються”). Достатньо обмежитися таким наближенням $u_k^{(l)}$, для якого поправка

$$\sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj}^{(l)} u_j$$

в будь-яку з компонент $u_{kp}^{(l)}$, $p = 1, 2, \dots, n$, вектора $u_k^{(l)}$ не перевищує за абсолютною величиною точності її зображення в ЕОМ. Теорема доведена повністю.

В ході доведення теореми ми знаходимо (зокрема з співвідношення (3.63)), що елементи β_{kj} матриці B в зображенні (3.12) потрібно вираховувати за формулами

$$\beta_{kj} = \lim_{p\to\infty} (\beta_{kj}^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} \beta_{kj}^{(i)} \prod_{m=0}^{i-1} \beta_{kk+1}^{(m)}), \quad j \le k,$$

$$\beta_{kk+1} = \lim_{p\to\infty} (\prod_{i=0}^{p} \beta_{kk+1}^{(i)}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \tag{3.64}$$

причому раціонально при цьому обмежитися значеннями $p = l$. Аналогічно визначаються елементи матриць B і в канонічних розкладаннях (3.21), (3.27) і (3.37).

Для того, щоб оцінити точність одержуваних таким чином елементів матриць B у всіх зображеннях (3.12), (3.21), (3.27) і (3.37) введемо до розгляду матриці похибок Δ_B, Δ_U, Δ_V, Δ_Q відповідно матриць B, U, V, Q і визначимо відносні похибки останніх співвідношеннями

$$\delta B = \frac{\|\Delta_B\|}{\|B\|}, \quad \delta U = \frac{\|\Delta_U\|}{\|U\|}, \quad \delta V = \frac{\|\Delta_V\|}{\|V\|}, \quad \delta Q = \frac{\|\Delta_Q\|}{\|Q\|}.$$

Якщо, виходячи з теорем 3.2 – 3.4, можна сказати, що точність обчислення ортогональної (A - ортогональної або біортогональної) системи векторів практично обмежена лише точністю зображення чисел в даній ЕОМ, то вже відносно точності елементів β_{ki} або b_{ki} матриць B справедливі слідуючи висновки з згаданих теорем.

Висновок 1. *Відносні похибки матриць B із зображень (3.12) і (3.21) оцінюються нерівністю*

$$\delta B \le 2c(A)\delta U,$$

де $c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — міра обумовленості початкової матриці A.

Доведення витікає з очевидної рівності $U\Delta_B = A\Delta_U - \Delta_U B$.

Висновок 2. *Відносні похибки матриці B з розкладу (3.27) оцінюються нерівністю*

$$\delta B \le c^2(Q)(1 + c(Q))\delta Q,$$

де при обчисленні числа $c(Q)$ слід враховувати, що $\|Q\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (q_i, q_i)$, $\|Q^{-1}\| = \|Q^* A\|$.

Насправді, з виразу $Q\Delta_B = A\Delta_Q - \Delta_Q B$ з врахуванням того, що мають місце рівності

$$Q^* AQ = E^{(n)}, \quad A^{-1} = QQ^*,$$

відразу ж знаходимо

$$\| \Delta_b \| \leq c(Q) \| A \| (1 + c(Q)) \delta Q.$$

А з матриць A і B витікає, що

$$\| A \| \leq c(Q) \| B \|$$

звідки знаходимо необхідний результат.

Висновок 3. *Відносні похибки матриці B в зображеннях (3.37) оцінюються нерівністю $\delta B \geq c(V) \delta U$, де $c(V) = \| U \| \cdot \| V \| = c(U)$.*

Доведення аналогічно попереднім.

Таким чином, висновками теорем 3.2 – 3.4 підтверджується відомий в теорії стійкості чисельних розв'язків збурюючих систем лінійних рівнянь факт: в питаннях стійкості чисельних методів непрямого визначення коефіцієнтів характеристичного багаточлена матриці вирішальну роль відіграє міра обумовленості матриці. Чим гірше обумовлена матриця тим з меншою точністю визначаються коефіцієнти характеристичного полінома.

Висновки. В розділі викладені за літературними даними деякі методи непрямого визначення коефіцієнтів характеристичного полінома матриці, засновані на ортогоналізації деяких послідовностей векторів. Охарактеризовані області застосування даних методів при розв’язуванні інших проблем обчислювальної алгебри, зокрема при визначенні власних векторів і при відшуканні розв’язків систем лінійних рівнянь.

В розвиток положень роботи [95] встановлено, що методи визначення коефіцієнтів полінома в класичному їх виконанні мало придатні для практичних обчислень на комп'ютерах, особливо в умовах поганої обумовленості матриць. В зв'язку з цим сформульована задача визначення з високою точністю шуканих коефіцієнтів і запропоновані способи стійкої реалізації класичних методів на комп'ютері, що враховують непокору машинної арифметики звичайним законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності.

Під цим кутом зору дано на відміну від традиційного [8, 12, 15, 37, 68, 69] і первинне трактування методів, що включає побудову ортонормованих або A - ортонормованих послідовностей векторів. Вказані способи вибору початкових векторів сукупностей, що будуються, котрі сприяють нормальному перебігу того або іншого процесу обчислень. Попутно доведена теорема 3.1, яка узагальнює на випадок несиметричної матриці відомий спосіб розв’язку систем рівнянь [69]. За допомогою прийомів, описаних в роботі [95], знайдені стійкі процедури доортогоналізації ортонормованої, A - ортонормованої або біортонормованої систем векторів, які дозволяють визначити з високою точністю, як самі вектори конструйованих множин, так і коефіцієнти характеристичного полінома. Доведені теореми 3.2 – 3.4 про збіжність процесів доортогоналізації ортонормованих, A - ортонормованих або біортонормованих послідовностей векторів. Вказані гарантовані оцінки точності шуканих коефіцієнтів на ЕОМ, звичайно, завищені, так як при їх отриманні розглядалися найбільш несприятливі можливі погрішності машинних операцій.

ВИСНОВКИ

За звітний період досліджень отримано нові результати щодо вирішення проблем коректності та розв’язності основних обернених задач теорії потенціалу, в числі яких методи розв’язання цих задач для конкретних математичних моделей геологічного середовища, що мають як суто теоретичне, так і прикладне значення. Основні результати досліджень відображені в фахових наукових виданнях та двох кандидатських дисертаціях, захищених за цей час авторами звіту.

Новим в теорії обернених задач для визначення контактної поверхні є введення в науковий обіг нового класу єдиності розв’язків лінійних обернених задач потенціалу – класу Нумерова, введеного на основі аналізу і узагальнення існуючих модельних уявлень і поста-

новок контактних задач. Крім того, новим є створення комплексу алгоритмів (які реалізують узагальнені способи відновлення контактної поверхні за вхідними даними, заданими як на довгих, так і коротких профілях), позбавлених прив'язки до величини середньої глибини h, характерної для відомих методів вирішення структурних задач граві- і магнітометрії. Детальне опрацювання питань чисельної збіжності та точності скінченновимірної апроксимації операторів лінійних та нелінійних задач для контакту з можливістю їх позитивного вирішення за вхідними даними на обмежених інтервалах вносить завершальні штрихи в теорію стійкого вирішення вищезгаданих умовно коректних задач визначення форми та щільності збурюючих тіл. Підсумки порівняння результатів чисельного моделювання розроблених алгоритмів та відомих класичних способів дозволили чітко окреслити місце перших в процедурі інтерпретації даних гравіметрії методом підбору та рекомендувати їх у складі автоматизованих систем для експрес-аналізу гравіметричних даних на територіях шаруватої будови.

Головний підсумок першої частини звіту полягає в обґрунтуванні залежності точності обчислень контакту не лише від похибок поля, але і від довжини інтервалу його задання та розробці нового методу відновлення контакту на основі інтегральних конструкцій зі швидко спадними ядрами, для якого потрібен значно менший обсяг вхідної інформації, ніж в існуючих методах.

В другому розділі розроблено ефективний метод розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, що описують відхилення контурів зіркових збурюючих областей від заданих, тобто вказано напрямок пошуку нормального розв'язку задачі відновлення границь зіркових тіл, близьких до круга. Глобальний регуляризуючий оператор для певного нелінійного рівняння відшукується у вигляді послідовності локальних операторів для відповідних лінійних інтегральних рівнянь. В рамках цієї задачі досліджено проблему єдиності розв'язку, а саме доведено теореми існування та стійкості.

Елементи новизни містить метод розв'язання систем лінійних рівнянь, який наведений у третій частині звіту. В ньому використовуються процеси доортогоналізації деяких сімей векторів, що виникають при побудові характеристичних поліномів матриць. Встановлено, що методи визначення коефіцієнтів полінома в класичному їх виконанні мало придатні для практичних обчислень на комп'ютерах, особливо в умовах поганої обумовленості матриць. В зв'язку з цим сформульована задача визначення з високою точністю шуканих коефіцієнтів і запропоновані способи стійкої реалізації класичних методів на комп'ютері.

На закінчення необхідно відмітити, що 27 травня 2003 року раптово обірвалося життя Арнольда Володимировича Чорного – керівника науково–дослідної роботи, доктора фізико–математичних наук, професора, головного наукового співробітника відділу глибинних процесів Землі і гравіметрії. Вчена Рада Інституту геофізики затвердила співкерівниками теми кандидатів фізико–математичних наук О. А. Чорну та А. І. Якимчика (протокол № 6 від 2 липня 2003 року). На жаль, авторам звіту не вдалося завершити деякі етапи дослідження. Зокрема, передбачалося розробити уніфікований метод доведення глобальних теорем єдиності розв'язування лінійних та нелінійних обернених задач теорії потенціалу, створити ряд методів розділення сумарного потенціального поля на складові, за допомогою якого розроблені способи пошуку збурювальних тіл за відповідними аномаліями можна було б поширити на складні реальні ситуації. Заплановані та розпочаті Арнольдом Володимировичем теоретичні дослідження автори цього звіту безперечно будуть в силу своїх можливостей продовжувати.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Алексидзе М. А.* Редукция силы тяжести. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 256 с.
2. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. *Алексидзе М. А.* Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тбилиси: Мецниереба, 1985. – 412 с.
4. *Алексидзе М. А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 352 с.
6. *Антонов Ю. В., Филатов В. Г.* Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных поверхностей //

Прикл. геофизика. – 1979. – Вып. 94. – С. 136–140.
7. *Андреев Б. А., Клушин И. Г.* Геологическое истолкование гравитационных аномалий. – Л.: Недра, 1965. – 496 с.
8. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1960. – 620 с.
9. *Бурдина В. И.* К одному методу решения систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР. – 1958, – **20**, №2 – С. 235 – 238.
10. *Бакушинский А. В., Гончарский А. В.* Некорректные задачи: численные методы и приложения. – М.: изд. МГУ, 1989. – 200 с.
11. *Балк П. И., Балк Т. В.* Об устойчивости решения обратной задачи гравиметрии для группы точечных источников // Геология и геофизика. 1982. – № 10. – с. 118–126.
12. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
13. *Гласко В. Б.* Обратные задачи математической физики. – М.: изд. МГУ. 1984. – 112 с.
14. *Гласко В. Б., Володин Б. А., Мудрецова Е. А., Нефедова Н. Ю.* О решении обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности методом регуляризации // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. – 1973. – № 2. – С. 30–41.
15. *Годунов С. К.* Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980. – 177 с.
16. Гравиразведка. Справочник геофизика (под ред. Е. А. Мудрецовой). – М. Наука, 1981. – 400 с.
17. *Данилюк И. И., Михалюк М. И.* О локальной единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала // Докл. АН УССР. Сер. А. 1972. – № 8. – С. 683–687.
18. *Дубовенко Ю. И.* Восстановление контактной границы в слоистой среде // Геофиз. журн. – 2002. – **24**, № 6. – С. 36–41.
19. *Дубовенко Ю. И.* Решение основных задач гравиметрии по значениям поля силы тяжести, заданного на ограниченных множествах // Геофизический мониторинг опасных геологических процессов и экологического состояния геологической среды: Материалы V-ой Международной научной конференции, Киев, 7-9.10.2004. – Киев: ВПЦ „Киевский университет”, 2004. – С. 135–136.
20. *Дубовенко Ю. И.* Применение гравиметрии для мониторинга слабоинтенсивных геодинамических процессов // Геофизический мониторинг опасных геологических процессов и экологического состояния геологической среды: Материалы V-ой Международной научной конференции, Киев, 7-9.10.2004. – Киев: ВПЦ „Киевский университет”, 2004. – С. 136.
21. *Дубовенко Ю. И.* Определение контактной границы по значениям производных логарифмического потенциала на существенно ограниченных множествах: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук – Киев, 2005. – 19 с.
22. *Заморев А. А.* Исследование двухмерной обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и геофиз. – 1941. - № 4-5. – С. 487–500.
23. *Заморев А. А.* Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. – 1942. № 1-2. – С. 48–54.
24. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
25. *Иванов В. К.* О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. – 1962. – т. 145, № 2. – С. 270–272.
26. *Иванов В. К.* О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Докл. АН СССР. – 1956. – 106, № 4. – С. 598–599.
27. *Исаков В. М.* О существовании решений обратных задач теории потенциала // Докл. АН СССР. 1978. – т. 240, № 4. – с.771–773.
28. *Исаков В. М.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. 1979. – т. 245, № 5. – С. 1045–1047.
29. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
30. *Капанадзе Д. В.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Сообщ. АН Гр. ССР. 1988. – т. 129, № 2. – С. 313–316.
31. *Кобрунов А. И., Денисюк Р. П.* Решение обратной задачи гравиразведки в классе плотностных границ с переменной плотностью на контакте // Изв. ВУЗов. Геология и разведка. – 1982. – № 9. – С. 108–117.
32. *Кобрунов А. И.* Анализ линейных приближений обратной задачи структурной гравиметрии // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1982. – № 9. – С. 7–9.
33. *Кублановская В. Н.* Об одном процессе доортогонализации системы векторов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1965. – **5**, № 2 – С. 326–329.
34. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: изд. СО АН СССР, 1962. – 92 с.
35. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. – 680 с.
36. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
37. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
38. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. – М.: Наука, 1965. – 252 с.
39. *Малкин Н. Р.* О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности при пластообразном залегании масс // Докл. АН СССР. – 1931. – А, № 9. – С. 231–235.

40. *Маловичко А. К.* Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. – М.: Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.
41. *Маслов В. П.* Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризованного процесса // Успехи матем. наук. – 1968. – т.23, вып. 3(141). – С. 183–184.
42. *Новиков П. С.* О единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. Новая серия. – 1938. – Т. 18, № 3. – С. 165–168.
43. *Новоселицкий В. М.* О построении плотностной границы по аномалиям силы тяжести // Прикл. геофизика. – 1966. – 47. – С. 120–129.
44. *Нумеров Б. В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. – 1930. – № 21. – С. 569–574.
45. *Оганесян С. М.* Теория и численные методы решения трехмерных задач гравиметрии: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 36 с.
46. *Оганесян С. М., Оганесян М. Г.* Регуляризующие алгоритмы решения трехмерных обратных задач гравиметрии // Геофиз журн. 1988. – т. 10, № 1. – С. 21–36; № 3. – С. 47–63.
47. *Прилепко А. И.* Обратная задача метагармонического потенциала для тела, близкого к данному // Сиб. матем. журн. 1965. – т. VI, № 6. – С. 1332–1356.
48. *Прилепко А. И.* К теории обратных задач обобщенных потенциалов: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1968. – 32 с.
49. *Прилепко А. И.* О разрешимости обратной задачи объемного потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному // Сиб. матем. журн. 1970. – т. XI, № 6. – С. 1321–1332.
50. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. – М.: Наука. – 1984. – 264 с.
51. *Сенько А. К.* К интерпретации гравитационных наблюдений по методу интегральных уравнений // Бюлл. нефт. геофиз. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – Вып. 3. – С. 151–152.
52. *Сербуленко М. Г.* Линейные методы разделения потенциальных полей // Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки (под ред. З. З. Фотиади). - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1966. – С. 389–457.
53. *Сретенский Л. Н.* Об одной обратной задаче теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1938. – №5–6. – С. 551–570.
54. *Сретенский Л. Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. – 1954. – т. 99, № 1. – С. 21–22.
55. *Старостенко В. И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1978. – 228 с.
56. *Старостенко В. И., Заворотько А. Н.* Решение обратных задач гравиметрии для нескольких контактных поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1982, № 3. – С. 46–61.
57. *Страхов В. Н.* Сведение проблемы аналитического продолжения в горизонтальный слой к решению линейных интегральных уравнений первого рода типа свертки с быстро убывающими ядрами // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1963, № 8. – С. 1206–1221.
58. *Страхов В. Н.* О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Диф. уравн. – 1970. – т. 6. – № 8. – С. 1489–1495.
59. *Страхов В. Н.* Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Мос. ун-т. – М., 1972. – 78 с.
60. *Страхов В. Н.* Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. – 1974. – № 2. – С. 43–65; 1974. – № 6. – С. 39–60; Докл. АН УССР. – 1971. – т. 200. – № 4. – С. 1489–1495.
61. *Страхов В. Н.* К теории фильтрации и трансформирования потенциальных полей при наличии априорной информации о помехах во входных данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 3. – С. 76–87.
62. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
63. *Тихонов А. Н.* О разрешимости некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – т. 151, № 3. – С. 501–504.
64. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. – 1975. – № 1. – С. 38–48.
65. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
66. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995. – 312 с.
67. *Тодоров И. Т., Зидаров Д. П.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. – 1958. – т. 120, № 2. – С. 262–264.
68. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
69. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М. – Л.: Физматгиз, 1963, – 734 с.
70. *Цирульский А.В.* О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границы возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 11. – С. 1693–1696.
71. *Цирульский А. В.* О решении прямой и обратной задачи гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. –

1974, № 7. – С. 84–90.
72. *Цирульский А. В.* Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей. – Л.: изд. ЛГУ, 1989. – 96 с.
73. *Чередниченко В. Г.* О разрешимости «в малом» обратной задачи потенциала с переменной плотностью в двумерном случае // Сиб. матем. журн. 1976. – т. 17, № 5. – С. 1168–1176.
74. *Чередниченко В. Г.* Обратная задача для потенциала слоистых сред в двумерном случае // Диф. уравн. – 1978. – т. 14, № 1. – С. 140–147.
75. *Чередниченко В. Г.* К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // Докл. АН СССР. – 1978. – т. 240, № 5. – С. 1032–1035.
76. *Черная Н. Н.* Исследование обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности: Дис. … канд. физ. - мат.наук: – Киев, Ин-т геофизики АН УРСР. – 1990. – 175 с.
77. *Черная Н. Н.* Конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов решения обратной задачи для контактной поверхности // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 6. – С. 105–118.
78. *Черная О. А.* Об устойчивых способах решений задач определения звездных областей, близких к заданным. 1, 2. // Геофиз. журн. – 1999. – **21**, № 3. – С. 100–118; № 6. – С. 51–71.
79. *Чорна О. А.* Дослідження обернених задач теорії логарифмічного потенціалу для тіл, близьких до заданих: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Інститут геофізики НАН України. – 1999. – 18 с.
80. *Черная О. А.* Функционалы в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 1. – С. 124–127.
81. *Черная О. А.* Вариационный принцип отбора допустимых решений задач восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 2. – С. 128–131.
82. *Черная О. А.* О восстановлении границы ограниченного звездного однородного тела, близкого к кругу // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 28 – сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского, Киев, 29 января – 2 февраля 2001 г. – Москва: ОИФЗ РАН, 2001 г. – С. 135–136.
83. *Черная О. А.* О построении регуляризующих операторов определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 5. – С. 31–59.
84. *Чорна О. А.* Обернена задача гравіметрії для обмеженого зірчастого однорідного тіла // Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища: Тези доповідей II Міжнародної наукової конференції, Київ, 8 – 10 жовтня 2001 р.– К.: ВПЦ "Київський університет", 2001. – С. 60.
85. *Черная О. А.* Адаптивные процедуры сглаживания входных данных в задачах определения ограниченных звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2001, № 8. – С. 111–115.
86. *Черная О. А.* Тихоновские фильтры в задачах определения неограниченных звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2001, № 9. – С. 123–126.
87. *Черная О. А.* О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для неограниченного тела, близкого к слою постоянной толщины с известной плотностью // Материалы второй Всероссийской конференции “Геофизика и математика” (посвященная 90-летию со дня рождения проф. А. К. Маловичко), Пермь, 10-14 декабря 2001 г. – М.: ОИФЗ РАН, 2001. – С. 287–296.
88. *Чорна О. А.* Про можливість розв’язання оберненої задачі гравіметрії для необмеженого тіла, близького до шару постійної товщини з відомою щільністю // Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища. – Изд. КУ, 2003. – С. 93–94.
89. *Чорна О. А.* Про відновлення границі обмеженого зіркового однорідного тіла, близького до круга. Ч. 1, 2 // Геоінформатика. – 2003, № 1. – С. 64–71; № 2. – С. 57–65.
90. *Чорна О. А.* Про відновлення границі обмеженого зіркового однорідного тіла, близького до круга. Ч. 3. // Геоінформатика. – 2005, № 1. – С. 48–56.
91. *Черная О. А., Якимчик А. И.* О процессах доортогонализации некоторых семейств векторов, возникающих при построении характеристических полиномов матриц и используемых при решении систем линейных алгебраических уравнений. Ч. 1, 2 // Геофиз. журн. – 2005. – **27**, № 3. – С. 503–511; № 5. – С. 790–805.
92. *Черный А. В.* Регуляризация численных решений систем линейных уравнений в задачах геофизики // Геофиз. журн. – 1981. – **3**, № 3. – С. 62–76.
93. *Черный А. В.* Устойчивость численных решений некорректных задач геофизики // Геофиз. журн. – 1981. – **3**, № 4. – С. 33–39.
94. *Черный А. В.* Вычисление решений возмущенных систем линейных уравнений при интерпретации геофизических данных. Ч. 1, 2 // Геофиз. журн. – 1982. – **4**, № 2. – С. 42–49; № 5. – С. 50–60.
95. *Черный А. В.* О точности численных решений некорректных задач геофизики // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – Киев: Наукова думка. – 1983. – С. 263–290.
96. *Черный А. В.* Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. – Киев: Институт геофизики НАН Украины. – 1992. – 34 с.
97. *Черный А. В., Дубовенко Ю. И.* Исследование обратной задачи потенциала для контактной поверхности // Геофиз. журн. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92.
98. *Черный А. В., Дубовенко Ю. И.* К теории структурной задачи гравиметрии в комплексной плоскости // Докл. НАН Украины. – 2002, № 4. – С. 145–149.
99. *Черный А. В., Дубовенко Ю. И.* Уточнение некоторых способов приближенного определения контактной гра-

ницы // Докл. НАН Украины. – 2002, № 12. – С. 99–103.
100. *Черный А. В., Черная Н. Н. и др.* Исследования по аналитическому продолжению модуля градиента потенциала силы тяжести (окончательный отчет за 1971 – 1975 г.г.). – Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. Б 531 958, № гос. рег. 76 077 388; фонды ИГ НАН Украины, Р 679, 1976 г. – 417 с.
101. *Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С.* Исследования по аналитическому продолжению модуля градиента потенциала силы тяжести (окончательный отчет за 1976 – 1980 г.г.). – Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. Б 955 198, № гос. рег. 79 015 294; фонды ИГ НАН Украины, Р 827, 1980 г. – 310 с.
102. *Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С.* Теория решения линейных и нелинейных задач интерпретации данных гравиметрии и магнитометрии (окончательный отчет за 1981 – 1985 г.г.). – Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. 02.86.006 6095, № гос. рег. 81 057 377; фонды ИГ НАН Украины, Р 997, 1985 г. – 428 с.
103. *Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С.* Граничные задачи теории интерпретации данных гравиметрии (окончательный отчет за 1986 – 1990 г.г.). – Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. 029.10 037 026, № гос. рег. 01 86 О 083 184; фонды ИГ НАН Украины, 835, 1990 г. – 356 с.
104. *Черный А. В., Черная Н. Н., Кислинская О. А.* Некоторые обратные задачи потенциалов, удовлетворяющих самосопряженным эллиптическим уравнения и их приложения в геофизике (окончательный отчет за 1991 – 1995 г.г.). – Фонды УИНТиЭИ, Киев, инв. О 296 U 000 115, № гос. рег. UA 01 001 290 P; фонды ИГ НАН Украины, 882, 1995 г. – 84 с.
105. *Черный А. В., Черная Н. Н. и др.* Граничная задача о восстановлении потенциала по модулю его градиента и ее использование в геодезической гравиметрии и в теории истолкования гравитационных и магнитных аномалий (окончательный отчет за 1995 – 2000 г.г.). – Фонды ИГ НАН Украины, № гос. рег. О 196 U 004 773, 2000 г. – 181 с.
106. *Черный А. В., Якимчик А. И.* Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента 2 // Геофиз. журн. – 2000. – **22**, № 6. – С. 166–183.
107. *Черный А. В., Якимчик А. И.* О корректной разрешимости линейных интегральных уравнений второго рода с оператором, обладающим большим ядром // Докл. НАН Украины. – 2001, № 1. - С. 144–147.
108. *Черный А. В., Якимчик А. И.* О сходимости последовательности приближений к потенциалу притяжения // Докл. НАН Украины. – 2001, № 2. – С. 139–143.
109. *Чорний А. В., Якимчик А. І.* Про нову нелінійну граничну задачу для рівняння Лапласа // Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища: Тези доповідей II Міжнародної наукової конференції, Київ, 8 – 10 жовтня 2001 р.– К.: ВПЦ "Київський університет", 2001. – С. 59.
110. *Шванк О. А., Люстих Е. Н.* Интерпретация гравитационных наблюдений. – М.-Л.: Гостоптехиздат, 1947. – 400 с.
111. *Якимчик А. И.* О способе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода // Докл. НАН Украины. – 2000, № 12. – С. 156–159.
112. *Якимчик А. И.* Нелинейная граничная задача восстановления потенциала по модулю его градиента // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 28 – сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского, Киев, 29 января – 2 февраля 2001 г. – Москва: ОИФЗ РАН, 2001 г., – С. 141.
113. *Якимчик А. І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис. … канд. фіз. – мат. наук. – Київ, 2001. – 15 с.
114. *Якимчик А. И.* О восстановлении потенциала по значениям модуля его градиента для случая двух переменных // Докл. НАН Украины. – 2005. – № 4. – С. 119–123.
115. *Hestenes M. R. Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear systems. – J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952 (1953). – **49**, № 5 P. 409–436.
116. *Lanczos C.* An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bur. Standards – 1950 – **45**, № 4 – P. 255–282.
117. *Lanczos C.* Solution of systems of equations by minimized iterations. // J. Res. Nat. Bur. Standards – 1952 – **49**, № 1, P. 33–53.
118. *Rainboy H.* The interpretation of torsion balance data // Proc. Ist World Petr. Congr., London, July 19-25. – 1933. – P. 406–413.